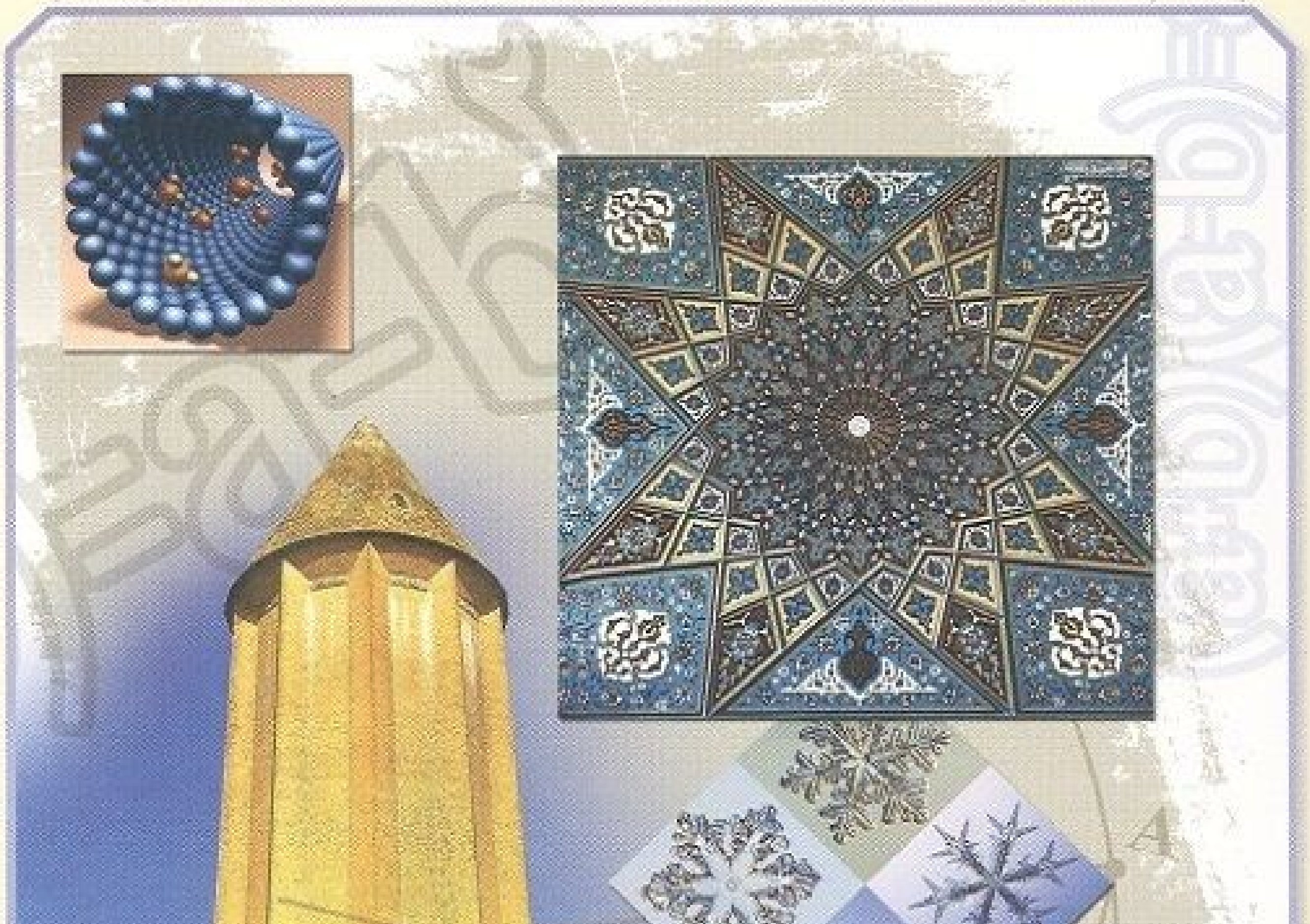
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ریاضی

پایهٔ نهم | دورهٔ اول متوسطه

۹۰۵



مجتمع آموزشی-فرهنگی دانشگاه علوم پزشکی شیراز

غیر دولتی

non-governmental

The Educational and Cultural Complex for Shiraz University of Medical Sciences

حوزه فناوری اطلاعات مجتمع

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳

بسم الله الرحمن الرحیم

اَللّٰهُمَّ صَلِّ عَلی مُحَمَّدٍ وَ آلِ مُحَمَّدٍ وَ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ

ریاضی

پایهٔ نهم

دورهٔ اوّل متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب:	ریاضی ـ پایهٔ نهم دورهٔ اوّل متوسطه ـ ۹۰۵
پدیدآورنده:	سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:	دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:	حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، طیبه حمزه بیگی، خسرو داودی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، احمد شاهورانی، میرشهرام صدر، شادی صفی‌نیا، اکرم قابل‌رحمت و محمد مقاصدی(اعضای شورای برنامه‌ریزی) حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، خسرو داودی، کبری دلشاد، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، هوشنگ شرقی و میرشهرام صدر (اعضای گروه تألیف) ـ افسانه حجتی‌طباطبایی و سیداکبر میرجعفری(ویراستار)
مدیریت آماده‌سازی هنری:	اداره کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی:	احمدرضا امینی(مدیر امور فنی و چاپ) ـ مجید ذاکری یونسی(مدیر هنری) ـ مهدی کریم‌خانی (طراح گرافیک و طراح جلد) ـ مریم نصرتی(صفحه‌آرا) ـ سیاوش ذوالفقاریان، الهام محبوب (تصویرگر) ـ مریم دهقان‌زاده(رسام) ـ زهرا ایمانی‌نصر، سیف‌الله بیک‌محمددلیوند، علی نجمی، پیام حمیدی، سپیده ملک‌ایزدی و ناهید خیام‌باشی(امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان:	تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی) تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹ وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر:	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱(داروپخش) تلفن: ۵ ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ ۳۷۵۱۵
چاپخانه:	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ:	چاپ دهم ۱۴۰۳

شابک ۰ -۲۴۳۵-۰۵-۹۶۴-۹۷۸ ISBN 978 -964 - 05 - 2435 - 0

- انسان عصارهٔ همه موجودات عالم است.
- با تربیت صحیح ممکن نیست که یک مملکتی تحت تأثیر استعمار باشد.
- اگر ملتی بخواهد به طرف سعادت پرواز کند، باید با دو بال تهذیب نفس و علم باشد.

امام خمینی (قُدِّسَ سِرُّهُ)

فهرست

سخنی با معلّم

کتاب ریاضی پایهٔ نهم بر مبنای برنامهٔ درسی ملی و در ادامهٔ تغییرکتاب‌های درسی پایه‌های هفتم و هشتم دورهٔ اوّل متوسطه تألیف شده است. زمانی تأکید کتاب‌های درسی ریاضی بیشتر بر توانایی انجام محاسبات بوده است. در رویکرد جدید ضمن حفظ این هدف، تأکید اصلی بر پرورش قوهٔ تفکر و تعقل و رشد توانایی حل مسئله است. اگرچه رسیدن به چنین هدفی با موانع، مشکلات و دشواری‌های فراوانی روبه‌روست و تحقق کامل آن به سرعت امکان‌پذیر نیست؛ ولی مدّنظر قرار دادن چنین هدفی می‌تواند جهت اصلی حرکت جامعهٔ آموزش ریاضی را تعیین کند. اصلی‌ترین و مؤثرترین نقش در این جهت به عهدهٔ معلّم است. قدرت انعطاف و هماهنگی و همراهی معلّمان با برنامه‌های جدید ستودنی است. مؤلفان کتاب حاضر سعی کرده‌اند که برای ادای وظیفه نسبت به آموزش معلّمان، ضمن اطلاع‌رسانی به موقع دربارهٔ تألیف، کتاب راهنمای معلّم و نیز فیلم‌های آموزشی را به موقع در اختیار همکاران عزیز قرار دهند.

ساختار کتاب از سه بخش فعالیت، کار در کلاس و تمرین تشکیل شده است. آنچه در انجام یک فعالیت به‌طور عمده مدّنظر بوده است، آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم درسی و سهیم‌بودن در ساختن دانش مورد نظر است. فعالیت‌ها شامل مراحلی مانند درک کردن، کشف کردن، حل مسئله، استدلال کردن، بررسی کردن، حدس و آزمایش، توضیح یک راه حل، مرتب کردن، قضاوت دربارهٔ یک راه حل و مقایسهٔ راه حل‌های مختلف است. هدایت فعالیت‌ها توسط معلّم انجام می‌پذیرد و هرجا که لازم باشد، راهنمایی توسط معلّم ارائه خواهد شد. در بسیاری موارد انجام فعالیت ساده و آسان نیست و صدالبته اجرای مناسب دارای ارزش زیادی خواهد بود. این فعالیت‌ها در حدّ متوسط طراحی شده‌اند. معلّم می‌تواند با توجه به زمان و توانایی دانش‌آموزان آنها را غنی‌تر کند یا با ارائهٔ توضیحاتی بیشتر و تغییراتی، فعالیت را ساده‌تر نماید.

هنگام انجام فعالیت، هدایتِ گفت‌وگوی کلاسی یا گفتمان ریاضی که در آن دانش‌آموزان به ارائهٔ دیدگاه‌ها و دفاع از اندیشه[1](ایده)های خود و نیز قضاوت و ارزیابی افکار و روش‌های ریاضی دیگر دانش‌آموزان می‌پردازند، به عهدهٔ معلّم است. به‌طور خلاصه فراهم کردن فرصت‌های یادگیری و دادن مجال به دانش‌آموز برای اینکه خود به کشف مفهوم بپردازد، می‌تواند یکی از دغدغه‌های همکاران عزیزمان باشد.

کار در کلاس با هدف تثبیت و تعمیق و در مواردی تعمیم یادگیری طراحی شده است و

۱ــ مصوّب فرهنگستان

انتظار این است که دانش‌آموزان بیشترین سهم را در حل آن داشته باشند. حلّ تمرین به عهدهٔ دانش‌آموزان است؛ امّا ارائه و بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان در کلاس ضروری است.

دربارهٔ ضرورت آموزش راهبردهای حل مسئله در بین پژوهشگران وآموزشگران تقریباً اتفاق‌نظر وجود دارد. با این حال دربارهٔ چگونگی این کار نظرات متفاوتی هست. در این کتاب آموزش راهبردها از متن درس جدا نشده است. ضمناً اصراری بر ذکر عناوین راهبردها جز موارد مشخص و آشنا نبوده است. بنابراین سعی شده است که از عبارات و واژه‌های نامأنوس اجتناب شود. با آنکه بخش جداگانه‌ای با عنوان حل مسئله در کتاب وجود ندارد؛ ولی در اکثر فعالیت‌ها دانش‌آموزان به نوعی درگیر فرایند حل مسئله می‌شوند. علاوه بر این، اساساً آموزش راهبردها معمولاً به زمانی طولانی نیاز دارد؛ زیرا هر راهبرد خود ممکن است شامل ده‌ها راهبرد جزئی‌تر باشد. ارائهٔ راه حل‌ها و روش‌های مختلف برای یک مسئله نیز به صورت هدفمند دنبال شده است. پژوهش‌ها نشان می‌دهند که دانش‌آموزان هنگام روبه‌رو شدن با یک مسئله ــ به ویژه وقتی که الگوریتمی مشخص برای حل آن فرانگرفته باشند ــ به روش‌های متفاوتی عمل می کنند.

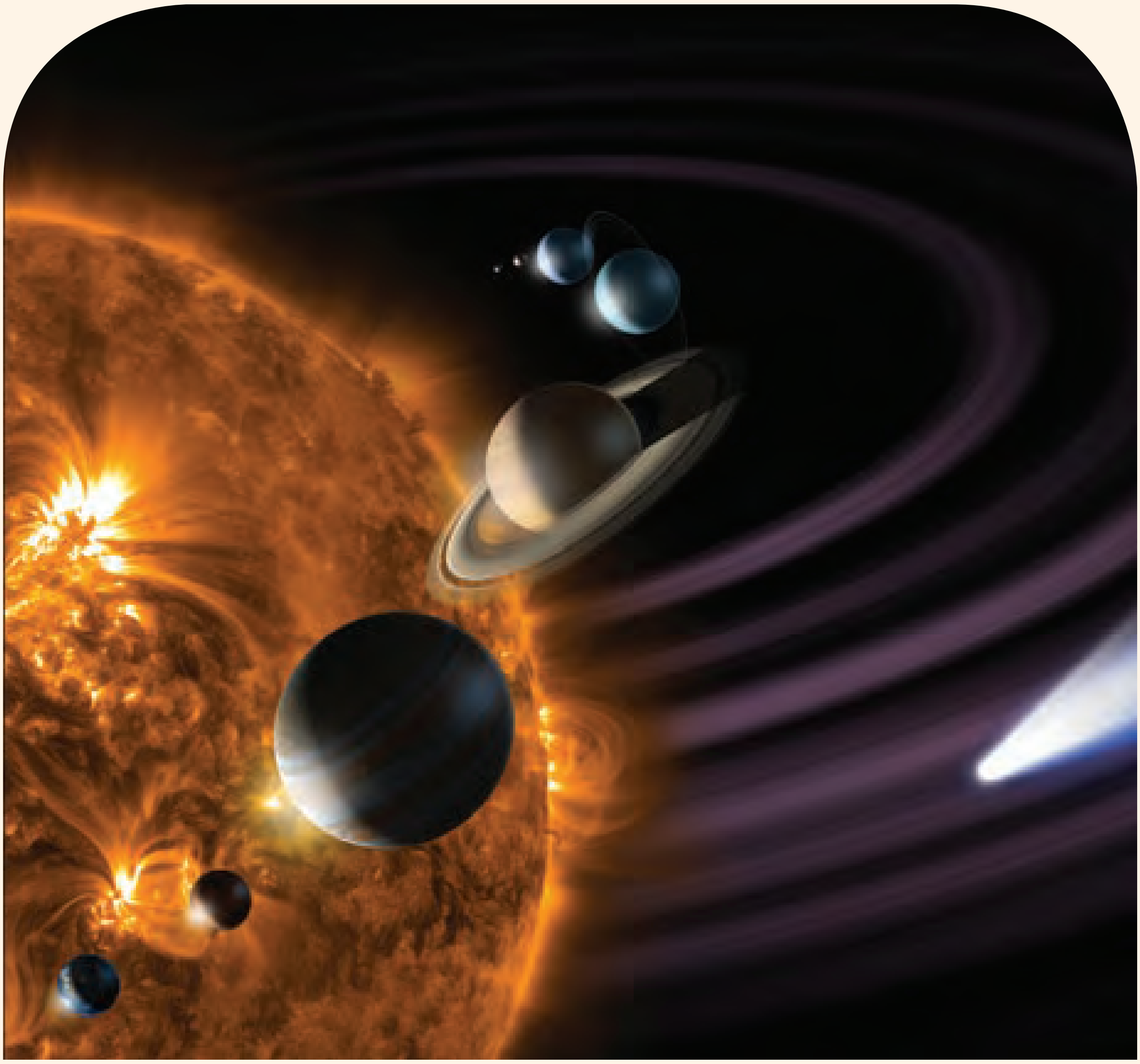
پس از آماده شدن نسخهٔ اولیهٔ کتاب، مؤلفان جلسات فشرده‌ای را برای نقد و اصلاح کتاب برگزار کردند و برخی تغییرات و اصلاحات را در کتاب اعمال نمودند. علاوه بر این نظرات اعتباربخشی و نیز نظرات دبیران سراسر کشور نیز مدّنظر قرار گرفت. لازم است مراتب تقدیر و تشکر خود را از تمام همکارانی که نسخهٔ اولیهٔ کتاب را مطالعه کرده‌اند و نظرات و بررسی‌ها و پیشنهادهای خود را به واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی ارسال کرده‌اند، اعلام کنیم. ده‌ها نقد رسیده از سراسر کشور نویدبخش حضور و مشارکت مؤثرتر دبیران ریاضی در تألیف کتاب‌های درسی است. گفتنی است مشاورانی علمی از مراکز آموزشی و پژوهشی و دانشگاه‌ها نیز بخش‌هایی محدود از کتاب را مطالعه و مورد نقد قرار دادند که جا دارد از آنها قدردانی شود. واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و عزیزان را از طریق وبگاه واحد[1] دارد. به‌علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه واحد قابل دریافت است. اطمینان داریم که با اتکال به خدای متعال، تنها با تلاش، اراده و همت معلّمان عزیز می‌توان به برآورده شدن اهداف کتاب امیدوار بود.

۱ــwww.mathrde.ir

فصل ۱

مجموعه‌ها

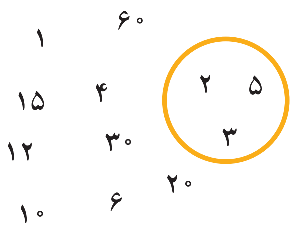
وَ هُوَ الَّذی جَعَلَ لَکُم النُّجومَ لِتَهتَدوا بِها فی ظُلُماتِ البَرِّ وَالبَحرِ ......
او (خداوند) کسی است که ستارگان را برای شما قرار داد، تا در تاریکی‌های خشکی و دریا، به وسیلهٔ آنها راه یابید...
(سورهٔ انعام، آیهٔ ۹۷)



منظومهٔ شمسی مجموعه‌ای است شامل ستارهٔ خورشید و سیّاره‌هایی که روی مدارهای خاصّی در حال چرخش هستند. البته ستاره‌هایی با بزرگی چندهزار برابر خورشید هم وجود دارند که اگر این ستاره‌ها به اندازهٔ خورشید به زمین نزدیک بودند، تمام آسمان ما را می‌پوشاندند.

درس اوّل: معرفی مجموعه

فعالیت



در شکل روبه‌رو شمارنده‌های طبیعی عدد ۶۰ را نوشته‌ایم و بین آنها شمارنده‌های اوّل را مشخص کرده‌ایم. شما هم شمارنده‌های ۶۰ را که اوّل نیستند، در یک منحنی بسته قرار دهید.

اگر شمارنده‌های طبیعی و اوّلِ عدد ۶۰ یعنی ۲، ۳ و ۵ را در داخل دو آکلاد قرار دهیم و آن را با حروفی چون A یا B یا ... نام‌گذاری کنیم و بنویسیم $A = \{۲,۳,۵\}$؛ در این‌صورت یک **مجموعه** تشکیل داده‌ایم و به هریک از عددهای ۲، ۳ و ۵ یک **عضو** مجموعهٔ A می‌گوییم؛ پس مجموعهٔ A دارای ۳ عضو است.

❋ شما شمارنده‌های مرکب عدد ۶۰ را به‌صورت یک مجموعه بنویسید و آن را B بنامید.

❋ مجموعهٔ شامل شمارنده‌های عدد ۶۰ که نه اوّل باشند، و نه مرکب، چند عضو دارد؟ این مجموعه را نیز C بنامید و آن را نمایش دهید.

❋ مجموعهٔ D شامل همهٔ شمارنده‌های دورقمی ۶۰ را تشکیل دهید؛ این مجموعه چند عضو دارد؟

از رضا و احمد خواسته شد تا مجموعهٔ شامل ۳ شمارندهٔ زوج عدد ۶۰ را تشکیل دهند. **احمد** نوشت: $\{۴,۶,۱۰\}$ و **رضا** نوشت: $\{۶,۱۰,۱۲\}$ به نظر شما چرا جواب‌های آنها با هم فرق دارد؟

نتیجه: در ریاضیات عبارت‌هایی شبیه این عبارت، که مشخص کنندهٔ یک مجموعهٔ معین و یکتا نباشد، مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند.

> در نمایش مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوهای مجموعه، مهم نیست و با جابه‌جایی عضوهای یک مجموعه، مجموعهٔ جدیدی ساخته نمی‌شود؛ همچنین با تکرار عضوهای یک مجموعه، مجموعهٔ جدیدی ساخته نمی‌شود؛ بنابراین به‌جای $\{۳,۳,۴\}$ می‌نویسیم $\{۳,۴\}$.

معرفی مجموعه

ما، در زندگی روزمره در صحبت‌ها و نوشته‌هایمان از واژه‌هایی مانند دسته، گروه و مجموعه استفاده می‌کنیم؛ برای مثال وقتی می‌گوییم «گروهی از ورزشکاران وارد ورزشگاه شدند»، نام ورزشکاران را مشخص نکرده‌ایم، درحالی که ما از مجموعه در ریاضی **برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای مشخص (عضویت این اشیا در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز (غیرتکراری)** استفاده می‌کنیم.

فعالیت

۱ــ کدام‌یک از عبارت‌های زیر مشخص‌کنندهٔ یک مجموعه است؟ مجموعهٔ مورد نظر را نمایش دهید.

الف) عددهای طبیعی و یک رقمی ب) چهار شاعر ایرانی ج) دو عدد اوّلِ کوچک‌تر از ۱۲

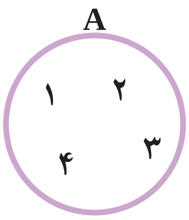
۲ــ با توجه به شرط متمایز بودن عضوهای یک مجموعه، جاهای خالی را پرکنید :

الف) به‌جای $A = \{۱,۲,۱,۴,۵\}$ باید بنویسیم $A = \{\_\_,\_\_,\_\_,\_\_\}$

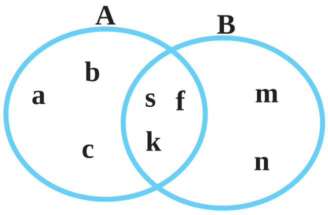
ب) به دلیل تکراری بودنِ عدد _____ در $B = \{۵,۶,۵,۷\}$ آن را به‌صورت __________ می‌نویسیم.

اگر مجموعهٔ A را به‌صورت $A = \{a,b,۵,۷\}$ درنظر بگیریم، برای نشان دادن اینکه a عضوی از مجموعهٔ A است، می‌نویسیم $a \in A$ و می‌خوانیم «a عضوِ A است» و چون عدد ۴ عضو A نیست، می‌نویسیم $۴ \notin A$ و می‌خوانیم «۴ عضو A نیست».

نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار وِن : مجموعه را می‌توان با استفاده از منحنی‌ها یا خط‌های شکستهٔ بسته نمایش داد؛ به عنوان مثال، نمایش مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ با استفاده از نمودار وِن به‌صورت مقابل است.



فعالیت



۱ــ با توجه به نمودار وِن، که برای دو مجموعهٔ A و B رسم شده است، مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان مشخص کنید.

۲ــ دو مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B = \{۵,۶,۷,۸\}$ را درنظر بگیرید : دو مجموعه را با یک نمودار وِن نمایش دهید. کدام عددها هم در منحنی بستهٔ مربوط به A و هم در منحنی بستهٔ B وجود دارد؟

۳ــ مجموعهٔ عددهای دو رقمی و زوجِ اوّل را بنویسید و آن را E بنامید. این مجموعه چند عضو دارد؟

«اگر در مجموعه‌ای عضوی وجود نداشته باشد، آن را مجموعهٔ **تُهی** می‌نامیم و با نماد $\varnothing$ یا {} نمایش می‌دهیم.» توجه شود که این مجموعه با مجموعهٔ $\{\varnothing\}$ یا $\{۰\}$ که هر کدام دارای یک عضو هستند، یکی نیست.

۴ــ کدام یک از عبارت‌های زیر، مجموعهٔ تهی را مشخص می کند؟

الف) عددهای طبیعی بین ۵ و ۶ ــ ب) عددهای صحیح بین ۱- و ۱

ج) عددهای اوّل و زوج ــ د) عددهای طبیعی یک رقمی و مضرب ۳ که اوّل باشد.

کار در کلاس

۱ــ سه عبارت بنویسید که هرکدام نشان دهندهٔ مجموعهٔ تهی باشد؛ سپس عبارت‌های خود را با نوشته‌های هم کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

۲ــ سه عبارت بنویسید که هرکدام مشخص‌کنندهٔ مجموعه‌ای فقط با یک عضو باشد.

۳ــ عبارت هایی که مجموعه‌ای را مشخص می کند، با علامت ✓ و بقیه را با علامت × مشخص کنید (با ذکر دلیل).

الف) چهار عدد فرد متوالی ــ ب) سه عدد طبیعی زوج متوالی با شروع از ۲

ج) عددهای اوّلِ کوچک‌تر از ۲۰ ــ د) سه شهر ایران ــ هـ) شمارنده‌های عدد ۲۴

و) ۵ عدد بزرگ ــ ز) عددهای طبیعی بین ۲ و ۳

۴ــ مانند نمونه کامل کنید :

☐ مجموعهٔ حروف الفبای فارسی	A = {الف، ب، پ، ...، ی}
☐ {۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹}	B = {۴,۸,۱۲,...}
☐ مجموعهٔ عددهای صحیح بین ۲- و ۳-	C : مجموعهٔ حروف a و b و عدد ۳
B مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۴	D = {۵}
☐ مجموعهٔ عددهای اوّل یک رقمی	E = { }
☐ مجموعهٔ مضرب‌های اوّل عدد ۵	F= {۲,۴,۶,۸}
☐ {۳,a,b}	G: مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۲ و ۱۰
☐ {۶,۴,۲,۸}	H={۲,۳,۵,۷}

۵ــ کدام‌یک از عبارت‌های زیر مشخص‌کنندۀ یک مجموعه است؟ با نمودار وِن نشان دهید :

الف) عددهای صحیح مثبت و کمتر از ۱۰

ب) شمارنده‌های اوّلِ عدد ۱۹

ج) عددهایی که شش وجه یک تاس معمولی را مشخص می‌کند.

د) جواب‌های معادلۀ ۱=۲x+۸

هــ) چهار میوۀ خوشمزه

و) عددهای صحیحِ منفی و بزرگ‌تر از ۸−

تمرین

۱ــ متناظر با هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد عضوهای هر مجموعه را تعیین کنید :

الف) $A = \{۱,۸,۲۷,۶۴,۱۲۵\}$

ب) $C = \{۱۰\}$

ج) عددهای طبیعیِ مضرب ۵ و کوچک‌تر از ۱۰۰

د) عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۴ و کوچک‌تر از ۵

هـ) عددهای صحیح منفی که بین ۴ و ۷ قرار دارد.

و) عددهای اوّل دورقمی که مضرب ۷ باشد.

۲ــ جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.

الف) عبارت «۵ عدد طبیعی که بین ۱ و ۲۰ قرار داشته باشد»، یک مجموعه را مشخص ________ .

ب) مجموعۀ $\{۲,۳,۴,...,۹\}$ دارای ________ عضو است.

ج) مجموعۀ $A = \{۰,\varnothing\}$ دارای ________ عضو است.

د) با توجه به مجموعۀ $A = \{۳,۵,۷,۹,۱۱\}$ ؛ داریم : ۵ عضو A است یا با نماد ریاضی، ________ و ۱۲ عضو A نیست یا با نماد ریاضی، ________ .

۳ــ سه مجموعۀ متفاوت بنویسید که عدد ۲ عضو آنها باشد.

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

دو مجموعهٔ برابر

فعالیت

۱۰		۱۲
−۴		−۲

۱ــ جدول عددهای صحیحِ روبه‌رو را طوری کامل کنید که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطرِ آن برابر ۱۲ شود؛ سپس مجموعهٔ عددهای سطر دوم جدول را بنویسید و آن را A بنامید.

اکنون مجموعهٔ B را چنان بنویسید که شامل سه عدد زوج متوالی و میانگین عضوهای آن با ۴ برابر باشد. هریک از مجموعه‌های A و B چند عضو دارد؟

آیا هر عضو A در مجموعهٔ B است؟ آیا هر عضو B در مجموعهٔ A است؟

همان‌طور که ملاحظه کردید، عضوهای دو مجموعهٔ A و B یکسان‌اند و هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A است؛ در این صورت دو مجموعهٔ A و B برابراند و می‌نویسیم $A = B$.

۲ــ مجموعهٔ A شامل سه عدد طبیعی متوالی است به‌طوری که حاصل جمع آنها برابر ۲۷ است. ابتدا A را با عضوهای آن بنویسید؛ سپس مجموعه‌هایی را مشخص کنید که در زیر معرفی شده و با A برابر است :

الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰

ب) مجموعهٔ عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۷ و کوچک‌تر از ۱۱

ج) مجموعهٔ سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آنها با ۹ برابر است.

همان‌طور که دیدید، مجموعهٔ {۸،۹،۱۰} با مجموعه {۷،۸،۹} برابر نیست؛ زیرا همهٔ عضوهایشان یکسان نیست.

اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که عضو A نباشد، در این‌صورت مجموعهٔ A با B برابر نیست و می‌نویسیم $A \neq B$.

کار در کلاس

۱ــ جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پرکنید که مجموعه‌ها برابر باشد :

الف) $\left\{۵, \_\_, \frac{۲}{۵}, ۴, \frac{۹}{۳}\right\} = \left\{\frac{۲}{۵}, ۳, \frac{-\sqrt{۱۴۴}}{(-۲)^۲}, \_\_, \sqrt{۲۵}\right\}$

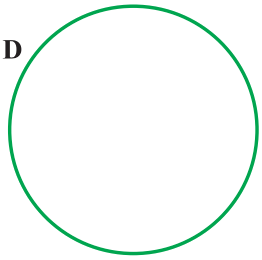
ب) $\left\{۷ , \frac{۴}{۱۰} , \sqrt{\frac{۴}{۹}} , -\frac{۱}{۲} , \_\_ , ۰/۶۲۵\right\} = \left\{\frac{۲}{۳} , \frac{۲}{۵} , -۰/۵ , \frac{۵}{۸} , \_\_ , -۲\right\}$

۲ــ دو مجموعه به نام‌های A و B مانند سؤال بالا طرح کنید. پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

زیر مجموعه

فعالیت

D



مجموعهٔ عددهای جدول فعالیت قبل را D بنامید؛ سپس عضوهای مجموعهٔ D را در نمودار وِن روبه‌رو بنویسید :

در نمودار بالا، عضوهایی را که بر ۳ بخش‌پذیر است، با یک منحنی بسته مشخص کنید و B بنامید.

مجموعهٔ B را بنویسید. آیا هر عضو B، عضوی از D نیز هست؟

در مجموعهٔ D، عددهای زوج را مشخص کنید و آن را C بنامید؛ آیا $D = C$؟

همان‌طور که دیدید، عضوهای مجموعهٔ B همگی در D هست؛ یعنی هر عضو B، عضوی از D است؛ در این صورت مجموعهٔ B **زیرمجموعهٔ** D است و می‌نویسیم $B \subseteq D$.

آیا مجموعهٔ C زیرمجموعهٔ D است؟

با توجه به تعریف زیر مجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیر مجموعهٔ خودش هست؛ یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، داریم : $A \subseteq A$.

اکنون زیرمجموعه‌ای از D را مشخص کنید که عضوهای آن عددهای فرد باشد؛ نام دیگر این مجموعه چیست؟

آیا عبارت $\{۱۰, ۴, -۶, ۲\} \subseteq D$ درست است؟ چرا؟

اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می‌گوییم B زیرمجموعهٔ A نیست و می‌نویسیم $B \nsubseteq A$.

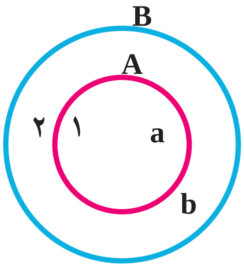
آیا در مجموعهٔ تُهی عضوی هست که در مجموعهٔ دلخواهی مانند A نباشد؟

مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای دلخواه مانند A است؛ یعنی؛ $\varnothing \subseteq A$.

مثال : دلیل درستی رابطه‌های زیر مشخص شده است.

الف) $\{a,b,d\} \nsubseteq \{a,b,c,e\}$ ؛ زیرا در مجموعهٔ سمت چپ، d هست که در مجموعه سمت راست نیست.

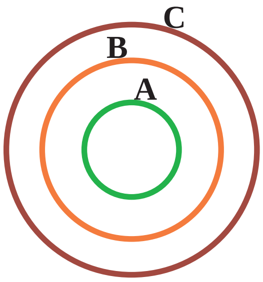
ب) $\{-۱,۰,۱,۳\} \subseteq \{۴,۳,۰,۱,-۱,۲\}$ ؛ زیرا هر عضو مجموعهٔ سمت چپ، عضوی از مجموعهٔ سمت راست است.



$A \subseteq B, B \not\subseteq A$

ج) با توجه به شکل مقابل $A \subseteq B$ درست است؛ زیرا همهٔ عضوهای A در B قرار دارند و $B \nsubseteq A$ درست است؛ زیرا عضوی در B مانند ۲ می‌توان یافت که در A وجود ندارد.

کار در کلاس



۱ــ با توجه به نمودار مقابل، دلیل درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید :

$$C \nsubseteq A \quad , \quad B \subseteq A \quad , \quad A \nsubseteq C \quad ,$$

$$A \subseteq B \quad , \quad B \subseteq C \quad , \quad \varnothing \subseteq A$$

۲ــ مجموعه‌های A، B و C را درنظر بگیرید؛ سپس درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید (با ذکر دلیل) :

$$A = \{۱,۳,۶,۴\} \quad , \quad B = \{۵,۱,۳\} \quad , \quad C = \{۲,۵,۱,۳,۶\}$$

$$B \nsubseteq A \quad , \quad ۳ \subseteq B \quad , \quad A \subseteq B \quad , \quad B \subseteq C \quad , \quad A \nsubseteq C \quad , \quad ۲ \in A$$

$$\{۱,۴\} \in A \quad , \quad ۶ \notin A \quad , \quad \{۵,۶\} \subseteq C \quad , \quad ۵ \in C \quad , \quad ۰ \subseteq A$$

۳ــ همهٔ زیرمجموعه‌های $A = \{a,b,c\}$ در زیر نوشته شده است :

$$\varnothing, \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$$

مانند نمونه، تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید :

الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۹ و ۱۲. ب) $\{a,b,c,d\}$

نمایش مجموعه‌های اعداد

در سال‌های گذشته با عددهای طبیعی آشنا شده‌اید؛ از این عددها برای شمارش استفاده می‌کنیم.

مجموعهٔ عددهای طبیعی را با $\mathbb{N}$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,۵,...\}$$

تاکنون نمایش مجموعه‌ها را با عضوها و نمودار وِن آموخته‌اید. یک روش دیگر برای نمایش مجموعه‌ها استفاده از نمادهای ریاضی است؛ برای مثال : مجموعهٔ عددهای طبیعی زوج $E=\{۲,۴,۶,۸,...\}$ را درنظر بگیرید. می‌دانیم عضوهای این مجموعه خاصیت مشترکی دارد؛ یعنی همگی آنها مضرب ۲، است و از قبل می‌دانیم که هر عدد زوج طبیعی به‌صورت $۲k$ قابل نمایش است که در آن $k\in\mathbb{N}$ ، پس می‌نویسیم : $E=\{۲k|k\in\mathbb{N}\}$

و می‌خوانیم E برابر است با مجموعهٔ عددهایی به شکل $۲k$ به‌طوری که k متعلق به مجموعهٔ عددهای طبیعی است. در مجموعهٔ E علامت « | » خوانده می‌شود : «به‌طوری که». در زیر چند مجموعه را با نمادهای ریاضی نوشته‌ایم :

الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی فرد : $O=\{۲k-۱|k\in\mathbb{N}\}$

ب) $A=\{۷,۸,۹,۱۰\}$ $\quad A=\{x\in\mathbb{N}|۷\le x\le ۱۰\}$ یا $A=\{x\in\mathbb{N}|۶<x<۱۱\}$

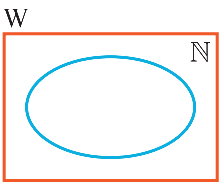
ج) زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}$ که عضوهای آن همگی بر ۳ بخش‌پذیر است : $\{۳k|k\in\mathbb{N}\}$

مثال : مجموعهٔ $A=\{۵n+۳|n\in\mathbb{N}\}$ را با عضوهایش مشخص کنید :

برای این منظور جدول زیر را کامل کنید و در هر مرحله به‌جای n یک عدد طبیعی در ۵n+۳ قرار دهید.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
$۵n+۳$	$\underbrace{۵(۱)+۳}_{۸}$	$\underbrace{۵(۲)+۳}_{۱۳}$	$\underbrace{۵(۳)+۳}_{۱۸}$	$\underbrace{۵(۴)+۳}_{۲۳}$				...

بنابراین داریم : $A=\{۸,۱۳,۱۸,۲۳,۲۸,۳۳,۳۸,...\}$

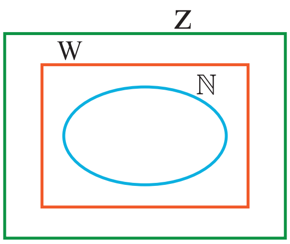


$\mathbb{N}\subseteq W$

مجموعهٔ عددهای حسابی را با W نمایش می‌دهند : $W=\{۰,۱,۲,۳,...\}$

مجموعهٔ عددهای حسابی را می‌توان با نمادهای ریاضی به‌صورت $W=\{k-۱|k\in\mathbb{N}\}$ نوشت.

هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است؛ یعنی $\mathbb{N}\subseteq W$



مجموعهٔ عددهای صحیح را با $\mathbb{Z}$ نمایش می‌دهیم :

$$\mathbb{Z}=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$$

همهٔ عددهای طبیعی و حسابی، عضو $\mathbb{Z}$ هم هستند؛ پس : $\mathbb{N}\subseteq W\subseteq\mathbb{Z}$

کار در کلاس

مجموعه‌های زیر را با عضوها مشخص کنید :

الف) مجموعهٔ عددهای صحیح فرد   ب) $A=\{x \mid x\in \mathbb{Z}, -۵\le x<۵\}$

ج) $B=\{۳k+۲ \mid k\in \mathbb{Z}\}$

مجموعه عددهای گویا را با Q نمایش می‌دهیم. چون اوّلین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست، نمی‌توان این مجموعه را با عضوها مشخص کرد؛ به همین دلیل مجموعهٔ عددهای گویا را با نمادهای ریاضی تعریف می‌کنیم : $Q=\left\{\frac{a}{b} \mid a,b\in \mathbb{Z}, b\neq ۰\right\}$

توجه کنید که هر عدد صحیح، عددی گویا است؛ یعنی برای هر عدد صحیح a داریم : $a=\frac{a}{۱}$، درنتیجه $\mathbb{Z}\subseteq Q$.

تمرین

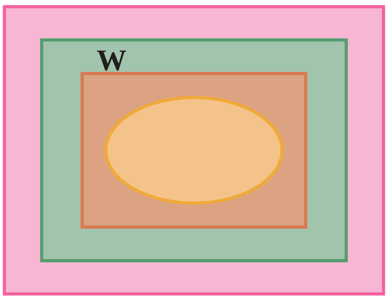
۱ــ مجموعهٔ $A=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ را درنظر بگیرید. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با هم برابر است؟

$B=\{x \mid x\in A, x^۲\le ۲\}$, $C=\{x \mid x\in A, -۱\le x\le ۱\}$, $D=\{x \mid x\in A, x^۴=۱\}$

۲ــ سه مجموعه مانند A، B و C بنویسید؛ به‌طوری که $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$. آیا می‌توان نتیجه گرفت $A\subseteq C$؟

۳ــ تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید :

الف) $A=\{x \mid x\in \mathbb{N}, ۲x+۱=۳\}$ ب) $B=\{۲x \mid x=۰,۲,۳\}$



۴ــ نمودار روبه‌رو، وضعیت مجموعه‌های Q، W، $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ را نسبت به هم نشان می‌دهد؛ آنها را نام‌گذاری و با علامت $\subseteq$ باهم مقایسه کنید.

۵ــ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید :

الف) هر عدد گویا عددی حسابی است.   ب) هر عدد حسابی عددی گویاست.

ج) هر عدد صحیح عددی گویاست.   د) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح‌اند.

فعالیت

۱ــ در کلاس درس، علی و رضا عضو هر دو تیم والیبال و فوتبال هستند. سامان، احسان، فرشید و حسین فقط در تیم والیبال و محمّد، حسن، کیوان و سبحان فقط در تیم فوتبال بازی می‌کنند.

الف) اگر مجموعهٔ دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با V و فوتبال را با F نشان دهیم، این مجموعه‌ها را با نمودار وِن نمایش دهید و سپس با عضوهایشان بنویسید.

ب) مجموعهٔ دانش‌آموزانی را که در هر دو تیم عضویت دارند، بنویسید.

ج) مجموعهٔ دانش‌آموزانی را که حداقل در یکی از این دو تیم عضویت دارند، بنویسید.

۲ــ دو مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x\leq ۶\}$ و $B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-۲\leq x\leq ۳\}$ را درنظر بگیرید و مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان تشکیل دهید:

الف) $A=\{\qquad\qquad\qquad\}$ ب) $B=\{\qquad\qquad\qquad\}$

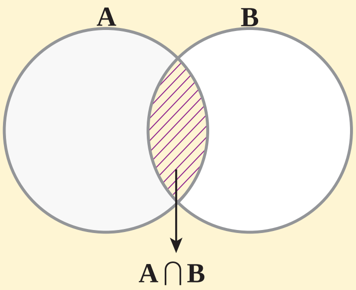
ج) مجموعهٔ عددهایی که در هر دو مجموعهٔ A و B هست $=\{\qquad\qquad\}$

(این مجموعه را اشتراک A و B می‌نامیم و با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهیم).

د) مجموعهٔ عددهایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B هست $=\{\qquad\qquad\}$

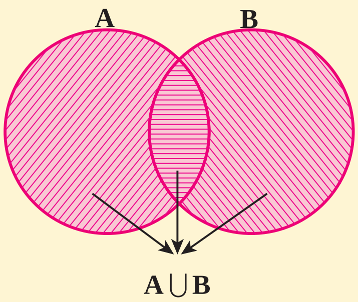
(این مجموعه را اجتماع A و B می‌نامیم و با نماد $A\cup B$ نشان می‌دهیم).

اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعهٔ A و B، مجموعه‌ای شاملِ همهٔ عضوهایی است که هم عضو مجموعهٔ A و هم عضو مجموعهٔ B است. این مجموعه را با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهیم. در نمودار روبه‌رو قسمت هاشور خورده اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد.



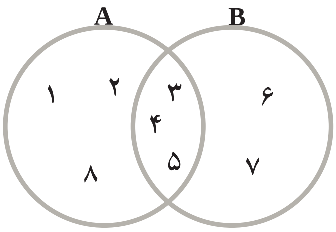
$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A \text{ و } x\in B\}$$

اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعهٔ A و B، مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B باشد. این مجموعه را با نماد $A\cup B$ نشان می‌دهیم. در نمودار، قسمت هاشور خورده، اجتماع دو مجموعه را نشان می‌دهد.



$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A \text{ یا } x\in B\}$$

مثال : با توجه به نمودار زیر ابتدا مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان می‌نویسیم و سپس $A\cap B$ و $A\cup B$ را تشکیل می‌دهیم :



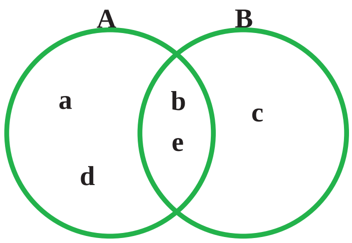
$A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۸\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶,۷\}$

$$A\cap B=\{۳,۴,۵\} \quad , \quad A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۸,۶,۷\}$$

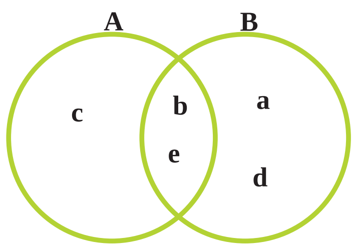
فعالیت

۱ــ دو مجموعهٔ $A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$ و $A\cap B=\{b,e\}$ را درنظر بگیرید. از دانش‌آموزان یک کلاس خواسته شده است که با توجه به این دو مجموعه، مجموعه‌های A و B را با نمودار وِن نمایش دهند. پاسخ چهار دانش‌آموزِ این کلاس را در زیر می‌بینید :

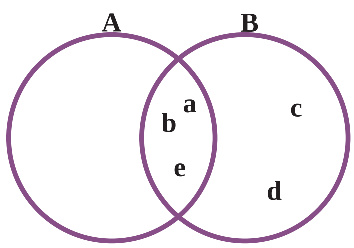
الف) دربارهٔ درستی یا نادرستی پاسخ این دانش‌آموزان بحث کنید و برای درستی یا نادرستی آنها دلیل بیاورید.



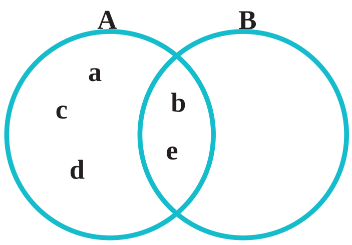
پاسخ حمیده



پاسخ حنانه



پاسخ زهرا



پاسخ ریحانه

ب) آیا شما هم می‌توانید جواب درست دیگری به این سؤال بدهید؟ پاسخ خود را با پاسخ هم کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

۲ــ با توجه به اوّلین فعالیت این درس و ورزشکاران دو تیم والیبال و فوتبال مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن عضو تیم والیبال باشد، ولی عضو تیم فوتبال نباشد (فقط در تیم والیبال بازی کند). این مجموعه را «V منهای F» می‌نامیم و با نماد $V-F$ نمایش می‌دهیم :

$V-F=\{ \qquad\qquad\qquad \}$ $\qquad$ $F-V=\{ \qquad\qquad\qquad \}$

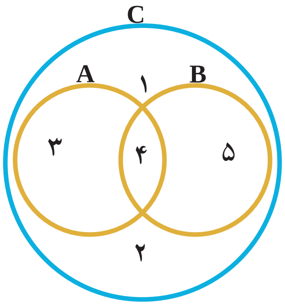
تفاضل دو مجموعه : مجموعهٔ $A-B$ (A منهای B) مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که عضو مجموعهٔ A هستند؛ ولی عضو مجموعهٔ B نیستند. در شکل زیر مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ هاشور خورده است :

$$A-B=\{x \mid x\in A, x\notin B\}$$

مثال : اگر $A=\{a,b,c,d,e,k\}$ و $B=\{c,d,k,f,s,t\}$ در این‌صورت :

$A-B=\{a,b,e\}$ و $B-A=\{f,s,t\}$

کار در کلاس



۱ــ با توجه به نمودار زیر کدام عبارت، درست و کدام نادرست است؟

الف) $A\subseteq C$ ب) $B\subseteq C$ ج) $C\subseteq (A\cup B)$

د) $(A\cup B)\subseteq C$ هـ) $۲\in (A\cup B)$ و) $۴\notin (A\cap B)$

ز) $A\cup B=A$ ح) $۵\in (A\cup B)$ ط) $۴\in (A\cup B)$

۲ــ مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ را A و مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۸ را B بنامید. ابتدا A و B را تشکیل و سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن، شمارندهٔ ۱۸ باشد؛ ولی شمارندهٔ ۱۲ نباشد.

ب) مجموعه‌ای تشکیل دهید که عضوهای آن، هم شمارندهٔ ۱۲ و هم شمارندهٔ ۱۸ باشد.

۳ــ مجموعه‌های $(\mathbb{Z}-\mathbb{N})$، $(\mathbb{N}-\mathbb{Z})$ و $(\mathbb{W}-\mathbb{N})$ را تشکیل دهید.

قرارداد : تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم؛ به عنوان مثال، اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد، می‌نویسیم $n(A)=k$.

مثلاً اگر $A=\{۲,۴,۶,۷\}$ در این صورت $n(A)=۴$.

تمرین

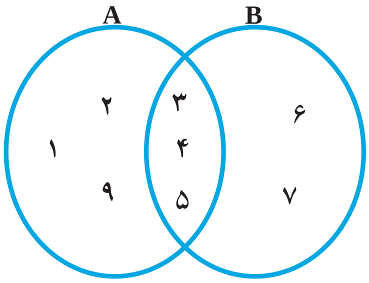
۱ــ مجموعه‌های $A=\{۲,۴,۶,۸,۹\}$ و $B=\{۱,۵,۷,۳,۹\}$ و $C=\{۱,۷,۱۰,۱۱\}$ را درنظر بگیرید؛ سپس هریک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید :

الف) $A\cup B$ ‏ ب) $B\cup C$ ‏ ج) $A\cup C$ ‏ د) $A\cap B$

هـ) $A-B$ ‏ و) $C-B$ ‏ ز) $(A-C)\cup(B-C)$ ‏ ح) $(A\cup B)-C$

ط) $A\cap A$ ‏ ی) $A\cap\varnothing$ ‏ ک) $B\cup B$ ‏ ل) $C\cup\varnothing$

۲ــ با توجه به نمودار زیر، عبارت‌های درست را با ✓ و گزاره‌های نادرست را با × مشخص کنید :



الف) $B-A=\{۶,۷\}$ ‏ ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=A$

ج) $(A-B)\cup(B-A)=\{۱,۲,۶\}$

د) $n(A\cup B)=۸$

هـ) $A-B=B-A$ ‏ و) $n(A-B)=n(B-A)$

۳ــ کلمات و مجموعه‌های داده شدهٔ زیر را در جاهای خالی قرار دهید :

۱) B ‏ ۲) A ‏ ۳) اجتماع

۴) زیرمجموعهٔ ‏ ۵) $(A\cup B)$

الف) اشتراک دو مجموعه، زیر مجموعهٔ ________ همان دو مجموعه است.

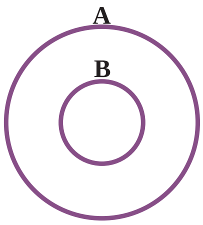
ب) هریک از دو مجموعهٔ A و B زیرمجموعهٔ ________ است.

ج) اشتراک دو مجموعهٔ A و B ________ هر یک از دو مجموعهٔ A و B است.

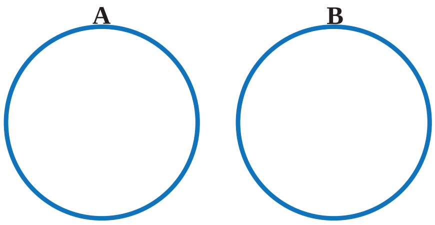
د) مجموعهٔ $A-B$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ ________ است.

هـ) اجتماع دو مجموعهٔ $(B-A)$ و $(A\cap B)$ با مجموعهٔ ________ مساوی است.

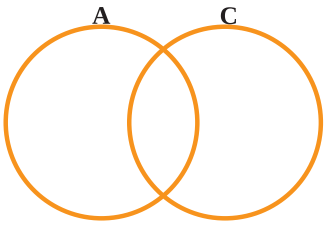
۴ــ در هریک از شکل‌های زیر مجموعهٔ موردنظر را هاشور بزنید.



$A\cap B$



$B-A$



$(A-C)\cup C$

درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال

در سال گذشته برای محاسبهٔ احتمال هر پیشامد از دستور زیر استفاده کردیم :

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

اکنون با توجه به آشنایی و شناخت شما نسبت به مجموعه‌ها و نمادگذاری‌ها، تا حدودی راحت‌تر می‌توان این فرمول را نوشت و به‌کار برد.

اگر مجموعهٔ شاملِ همهٔ حالت‌های ممکن را S، مجموعهٔ شاملِ همهٔ حالت‌های مطلوب را A و احتمالِ رخ دادن پیشامد A را با نماد P(A) نشان دهیم، دستور بالا به‌صورت $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ نوشته می‌شود.

یادآوری

مثال : اگر تاسی را بیندازیم، احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به‌دست آورید :

الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد.

ب) عدد رو شده اوّل باشد.

ج) عدد رو شده از ۶ بزرگ‌تر باشد.

د) عدد رو شده از ۷ کمتر باشد.

حل : الف) پیشامد مطلوب یعنی رو شدن مضرب ۳ را A می‌نامیم؛ در این صورت داریم :

$$A=\{۳,۶\}\ ,\ S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\};\ n(A)=۲\ ,\ n(S)=۶$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

ب) B : پیشامد رو شدن عدد اوّل ; $B=\{۲,۳,۵\};\ n(B)=۳$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

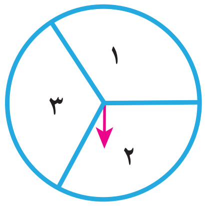
ج) C : پیشامد رو شدن عدد بزرگ‌تر از ۶ ; $C=\varnothing \rightarrow n(\varnothing)=۰$

$$P(C)=P(\varnothing)=\frac{۰}{۶}=۰$$

د) D : پیشامد رو شدن عدد کمتر از ۷ ; $D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}=S$

$$P(D)=P(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=\frac{۶}{۶}=۱$$

فعالیت



با توجه به چرخندهٔ مقابل، همهٔ حالت‌های ممکن را که عقربه می‌تواند بایستد و عددی را نمایش دهد، مجموعهٔ S بنامید. S را با عضوهایش نمایش دهید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید :

الف) مانند نمونه برای هر مجموعه با بیان یک جمله، یک پیشامد تعریف کنید :

$A=\{۳,۱\}$ (عقربه روی ناحیهٔ ۱ یا ۳ بایستد) یا (عقربه روی عدد فرد بایستد)

$B=\{۱,۲\}$ ______

$C=\{۲,۳\}$ ______ $D=\{۲\}$ ______

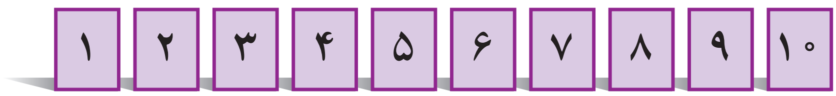
پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

ب) هریک از زیرمجموعه‌های S را پیشامد تصادفی می‌نامیم. احتمال رخداد هریک از این پیشامدها را به‌دست آورید. چه تعداد از این پیشامدها **هم‌شانس‌اند**؟ پاسخ‌های خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

ج) همهٔ زیرمجموعه‌های S را تشکیل دهید.

کار در کلاس

۱۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم.



الف) مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن $S=\{۱,۲,...,۱۰\}$ است. پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم که «عدد روی کارت خارج شده از ۵ کمتر باشد». مجموعهٔ A را تشکیل دهید و احتمال رخداد پیشامد آن را به‌دست آورید.

ب) مجموعه یا پیشامدی تعریف کنید که احتمال رخ دادنِ آن پیشامد، $\frac{۴}{۱۰}$ باشد.

ج) اگر B پیشامد خارج شدن عدد اوّل و C پیشامد خارج شدن عدد زوج باشد، مجموعه‌های B و C را تشکیل دهید و احتمال رخدادِ هریک را محاسبه کنید. آیا پیشامدهای B و C هم‌شانس‌اند؟ چرا؟

تمرین

۱ــ اگر تاسی را بیندازیم، چقدر احتمال دارد :

الف) عدد رو شده زوج باشد. ب) عدد رو شده زوج و از ۲ بزرگ‌تر باشد.

ج) عدد رو شده زوج و اوّل باشد. د) عدد رو شده از ۳ کمتر باشد.

۲ــ اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، اوّلاً مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را تشکیل دهید (هر عضو این مجموعه را به‌طور مثال به‌صورت (د،د،پ) نمایش دهید). ثانیاً چقدر احتمال دارد این خانواده دارای دو دختر (یعنی دقیقاً دو دختر) باشد؟

۳ــ در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره را تصادفی از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد :

الف) این مهره آبی باشد. ب) این مهره سبز نباشد.

ج) این مهره قرمز یا سبز باشد.

۴ــ اگر تاسی را دو بار بیندازیم (یا دو تاسِ آبی و قرمز را با هم بیندازیم)، چقدر احتمال دارد : (اگر مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را S بنامیم، $n(s) = ۳۶$)

الف) هر دو بار، عدد اوّل رو شود. ب) دو عدد رو شده، مثل هم باشد.

ج) دو عدد رو شده، مضرب ۳ باشد. د) مجموع دو عدد، ۷ باشد.

خواندنی

در بسیاری از کتاب‌های ریاضی، از مجموعه به‌عنوان گروهی (یا دسته‌ای) از اشیا نام برده شده است. غافل از آنکه اگر بگوییم مجموعه گروهی از اشیا است، باید بگوییم گروه چیست؟! آیا می‌توانیم گروه را تعریف کنیم؟

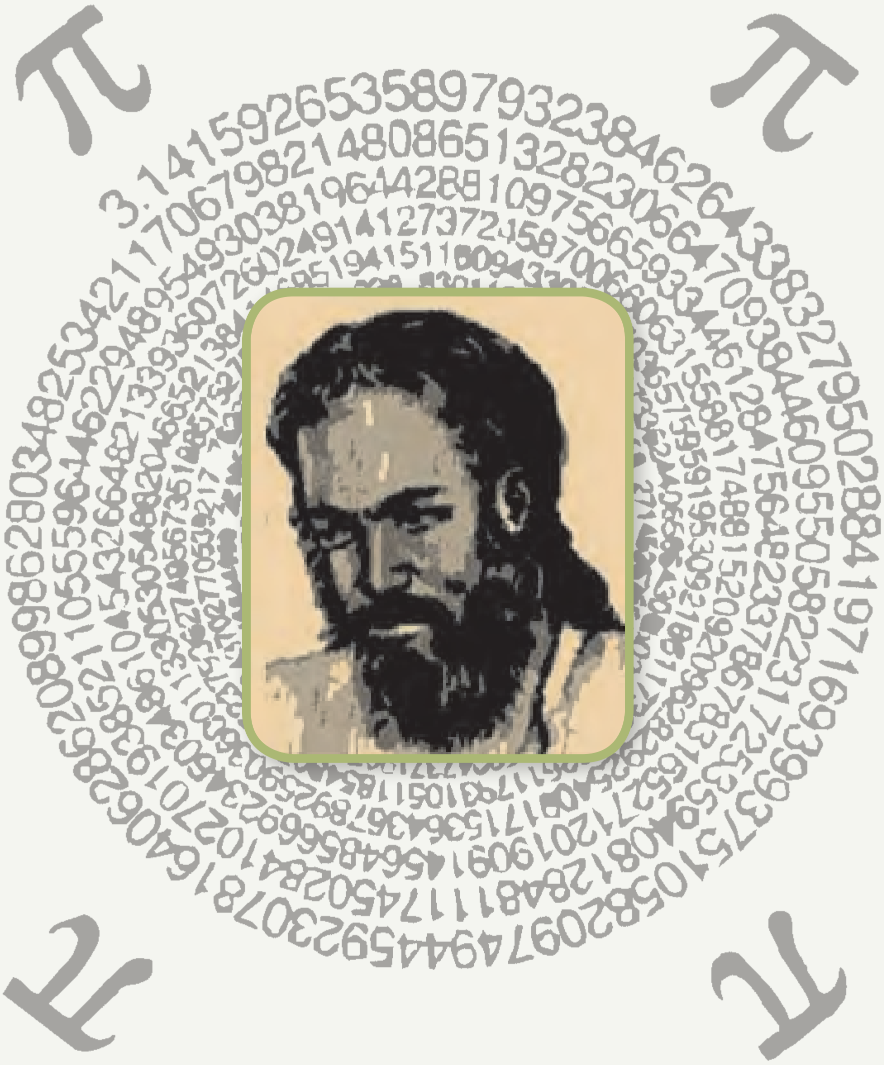
درواقع چاره‌ای نیست جز آنکه مانند سیمورلیپ‌شوتز (ریاضی‌دان معاصر) بگوییم : در همهٔ شاخه‌های ریاضی مجموعه یک مفهوم بنیادی است. به عبارت دیگر مجموعه جزءِ نخستین تعریف نشده‌هاست، مانند مفاهیمی چون نقطه و خط در هندسه، که برای آنها تعریف دقیقی نداریم ولی آنها را با اثر خود می‌شناسیم.

فصل ۲

عددهای حقیقی

«... وَ اَحاطَ بِما لَدَیْهِمْ وَ اَحْصیٰ کُلَّ شَیْءٍ عَدَدًا»

«... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه‌چیز را به عدد شمارش کرده است.» (سورهٔ جن، آیهٔ ۲۸)

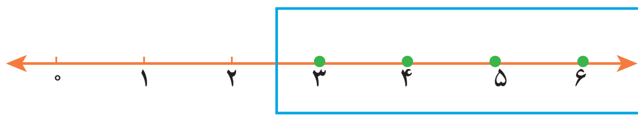
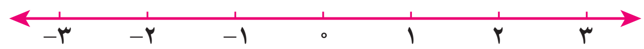


غیاث‌الدین جمشید کاشانی زبردست‌ترین حسابدان، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دورهٔ اسلامی و از بزرگ‌ترین مفاخر تاریخ ایران به‌شمار می‌رود. کاشانی به روشی کاملاً خلاقانه و از طریق محاسبه و مقایسه محیط چندضلعی‌های محاطی و محیطی توانست عدد π که عددی **حقیقی** و **گنگ** است را تا ۱۶ رقم بعد از اعشار محاسبه کند که تا حدود ۱۵۰ سال پس از وی کسی در جهان نتوانست با دقت بهتری آن را محاسبه کند. او در ابتدای رسالهٔ محیطیه خود به زبانِ ریاضی به نام خدا را چنین بیان می‌کند:

«به نام او که از اندازهٔ نسبتِ محیط دایره به قطرش آگاه است.»

فعالیت

۱ــ در فصل گذشته با نمایش‌های مختلفِ مجموعه‌های اعداد آشنا شدید. عبارت‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید:

ردیف	عبارت کلامی	زبان نمادین	محور
۱	عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳	$\{x\in \mathbb{N} \mid x\ge ۳\}$ $\{۳,۴,۵,\ldots\}$	
۲	عددهای حسابی ـــــــــ ـــــــــــــــــــ	$\{x\in W \mid x\le ۲\}$ {ــــــــــ}	
۳	عددهای صحیح بین ۳− و ۲	$\{x\in \mathbb{Z} \mid$ ــــــ $\}$ {ــــــــــ}	
۴	عددهای صحیح بزرگ‌تر از ۱−	{ــــــــــ} {ــــــــــ}	

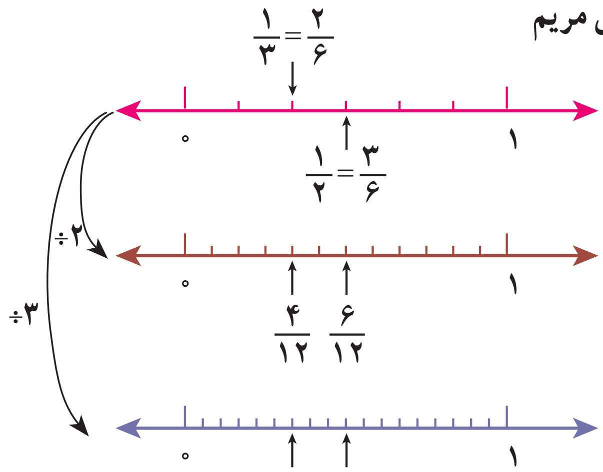
نامساوی $x\ge ۳$ برای کدام‌یک از عددهای زیر درست است؟

۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵

در مورد محدودیت‌ها و مزایا و معایب هرکدام از روش‌های نمایش مجموعه در کلاس گفت‌وگو کنید.

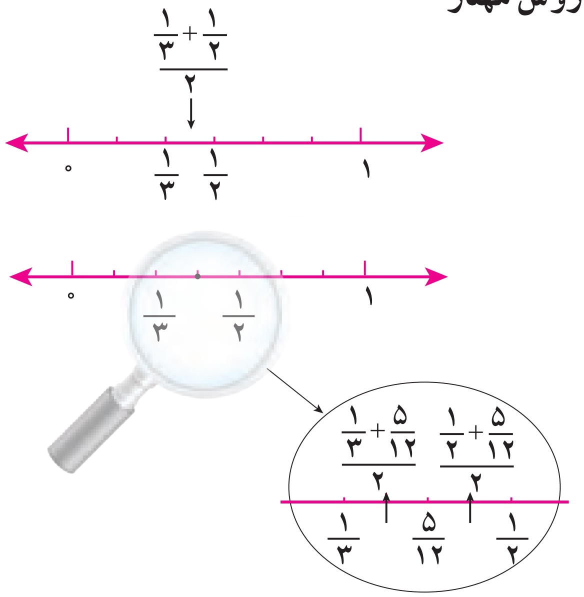
۲ــ می‌خواهیم بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ چند کسر بنویسیم. روش‌های مختلفی را که چهار دانش‌آموز نوشته‌اند، بررسی و کامل کنید؛ راه حل هر کدام را توضیح دهید.

روش مریم



روش بهار

$$\frac{۱}{۳} < \ ? \ < \frac{۱}{۲}$$
$$\frac{۲}{۶} < \ ? \ < \frac{۳}{۶}$$
$$\xrightarrow{\times ۲} \quad \frac{۴}{۱۲} < \frac{۵}{۱۲} < \frac{۶}{۱۲}$$
$$\xrightarrow{\times ۳} \quad \frac{۶}{۱۸} < \frac{۷}{۱۸} \ , \ \frac{۸}{۱۸} < \frac{۹}{۱۸}$$

روش عطیه	روش مهناز
$\frac{۱}{۳} < ؟ < \frac{۱}{۲}$ $\frac{۱}{۳} < \frac{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}}{۲} < \frac{۱}{۲}$ $\frac{۱}{۳} < \frac{۵}{۱۲} < \frac{۱}{۲}$	

الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان به هر تعداد، کسر پیدا کرد.

ب) آیا مجموعهٔ عددهای گویا را می‌توان با نوشتن عضوها نشان داد؟ چرا؟

ج) آیا می‌توان مجموعهٔ عددهای گویا را با محور اعداد نمایش داد؟

د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید. $\left\{\frac{a}{b} \mid \qquad \qquad \right\}$

کار در کلاس

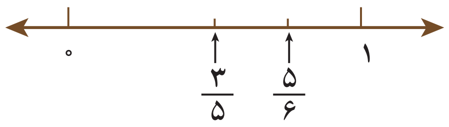
۱ــ بین $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۳}{۴}$ سه کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

۲ــ بین $-\frac{۱}{۲}$ و -۱ دو کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

فعالیت

۱ــ می‌خواهیم کسرهای $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۵}{۶}$ و $\frac{۷}{۸}$ و $\frac{۵}{۹}$ را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم.

روش‌های مختلفی را که دانش‌آموزان به‌کار برده‌اند، با هم مقایسه کنید؛ هر کدام را توضیح دهید و در صورت لزوم کامل کنید.



روش شاهد : شاهد به‌صورت تقریبی کسرهای $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۵}{۶}$ را روی محور مشخص کرده است. آیا به‌نظر شما استفاده از این روش برای نمایش دو کسر دیگر مناسب است؟

روش مرتضی : مرتضی مخرج مشترک کسرها را پیدا کرد و با هم مخرج کردن کسرها، آنها را مقایسه می‌کند. توضیح دهید که عدد ۳۶۰ چگونه به دست می‌آید. کار مرتضی را کامل کنید :

$\frac{۳}{۵} = \frac{}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{۵}{۶} = \frac{}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{۷}{۸} = \frac{}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{۵}{۹} = \frac{}{۳۶۰}$

روش مجید : مجید به کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری هر کسر را تا دو رقم اعشار نوشت. شما کار او را کامل، و کسرها را مقایسه کنید :

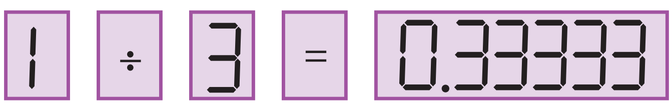
$\frac{۳}{۵} =$ $\qquad$ $\frac{۵}{۶} \simeq$ $\qquad$ $\frac{۷}{۸} \simeq$ $\qquad$ $\frac{۵}{۹} \simeq ۰/۵۵$

در مورد روش‌های مختلف و ویژگی‌های هر کدام در کلاس گفت‌وگو کنید.

۲ــ با استفاده از تقسیم، نمایش اعشاری کسرهای زیر را بنویسید :

$\frac{۷}{۶} \simeq$ $\qquad$ $\frac{۱}{۳} \simeq$ $\qquad$ $\frac{۳}{۸} \simeq$

الف) بین نمایش اعشاری این کسرها چه تفاوتی هست؟



در نمایش اعشاری کسر $\frac{۱}{۳}$، رقم ۳ به‌طور متناوب تکرار می‌شود و انتها ندارد؛ ولی نمایش اعشاری کسر $\frac{۱}{۵}$ متناهی یا مختوم است؛ چون تمام رقم‌های اعشار آن مشخص است و به انتها می‌رسد. از نماد زیر برای نمایش عددهای اعشاری متناوب استفاده می‌کنیم :

$\frac{۷}{۶} = ۱/۱۶۶۶... = ۱/۱\overline{۶}$ $\qquad$ $\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳... = ۰/\overline{۳}$

کار در کلاس

نمایش اعشاری هر یک از کسرهای زیر را بنویسید :

$\frac{۵}{۶}=$ $\qquad$ $\frac{۷}{۹}=$ $\qquad$ $\frac{۵}{۱۱}=$

$\frac{۵}{۱۶}=$ $\qquad$ $\frac{۳}{۲۰}=$ $\qquad$ $\frac{۷}{۲۲}=$

اگر به نمایش اعشاری کسرهای بالا دقت کنید، خواهید دید که فقط کسرهایی نمایش اعشاری مختوم دارند که (پس از ساده شدن) مخرج آنها شمارنده اوّلی به‌جز ۲ و ۵ ندارد.

تمرین

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید و تا حد امکان ساده کنید :

$$\frac{۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}}{\frac{۵}{۱۰}-\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}}\div ۵\frac{۱}{۳}$$

$$(-۲\frac{۵}{۶}+۳\frac{۱}{۲})\div(-۱-\frac{۱}{۹})$$

$$\frac{۱}{-۱-\frac{۱}{-۱-\frac{۱}{۳}}}$$

$$-\frac{۱}{۲}+\frac{-۵}{۶}\div\frac{۷}{۳}\times\frac{۷}{۵}+\frac{۲}{۳}$$

۲ــ عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

ب) $\frac{۱۶}{۷}\,,\,-\frac{۳}{۴}\,,\,۲/۷۵\,,\,-\frac{۵}{۶}\,,\,۴\frac{۳}{۵}\,,\,\frac{۵۶}{۱۳}$

الف) $\frac{۷}{۸}\,,\,-\frac{۲}{۳}\,,\,\frac{۳}{۴}\,,\,۲\,,\,-۳\frac{۵}{۶}$

۳ــ بین هر دو کسر، سه کسر بنویسید.

ب) $۰\,,\,-\frac{۱}{۳}$

الف) $\frac{۱۰}{۱۱}\,,\,\frac{۱۲}{۱۳}$

فعالیت

۱ــ پنج عدد بین ۱ و ۲ معرفی کنید و آنها را روی محور نمایش دهید.

۲ــ با توجه به اینکه مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$ مساوی ۱/۴ است، آن را روی محور نشان دهید.

۳ــ معلّم از دانش‌آموزان خواست با ماشین حساب، مقدار تقریبی عدد $\sqrt{۲}$ را بنویسند. با توجه به اینکه دانش‌آموزان از ماشین‌حساب‌های مختلف استفاده می‌کردند، تعداد رقم‌هایی که نوشته بودند، متفاوت بود. سه نمونه از صفحهٔ نمایش ماشین‌حساب‌ها را در زیر می‌بینید. با توجه به آنها به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

1.4142136 1.414213562

1.41421356237

ــ چرا در ماشین حساب ۸ رقمی، رقم آخر با رقم مشابه در ماشین حساب ۱۲ رقمی تفاوت دارد؟

ــ چرا این تفاوت در ماشین حساب‌های ۱۰ رقمی و ۱۲ رقمی دیده نمی‌شود؟

ــ با توجه به عددی که ماشین حساب ۱۲ رقمی نشان می‌دهد، آیا تناوب (تکرار منظم) در رقم‌های اعشاری دیده می‌شود؟

ــ مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$ ، تا ۱۵ رقم اعشار محاسبه، و در زیر نوشته شده است:

1.414213562373095

آیا در ۱۵ رقم نشان‌داده شده برای $\sqrt{۲}$ ، تناوبی می‌بینید؟

عددهایی مانند $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۱۰}$ ، ...۰/۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱ و π را، که تعداد ارقام اعشاری آنها انتها ندارد (نامتناهی است) و دارای دورهٔ تناوب نیستند، عدد **گنگ**[۱] **(اصم)** می‌گوییم. مجموعه‌ای که این عددها در آن قرار دارد، مجموعه عددهای گنگ می‌نامیم و آن را با Q' یا Q^c نمایش می‌دهیم.

$\sqrt{۲}$ عددی گنگ است. اثبات این مطلب را در سال‌های آینده می‌خوانید.

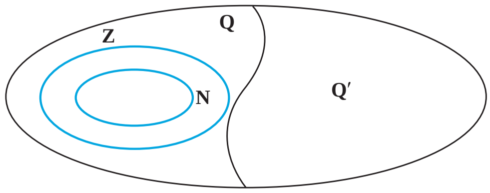
۱ــ مصوّب فرهنگستان

عدد π نیز گنگ است. در زیر عدد π تا ۳۰ رقم اعشار نوشته شده است؛ امّا در محاسبات، معمولاً تا دو رقم اعشار π استفاده می‌شود :

$$\pi \simeq ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹$$

اگر عدد n مربع کامل نباشد، $\sqrt{n}$ گنگ است؛ مانند $\sqrt{۱۵}$ ، $\sqrt{۶}$ ، ... (عددهایی مانند ۱، ۴، ۹، ۱۶ و ... مربع کامل است.)

مثال : مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و Q و Q' به کمک نمودار ون، مشخص شده است.



مثال : $۰/۲۰۰۲۰۰۰۲۰۰۰۰۲... \in Q'$ $\quad ۰ \in Q$ $\quad \sqrt{۰/۴۹} \in Q$ $\quad \sqrt{۳} \in Q'$ $\quad -\frac{۳}{۴} \in Q$

کار در کلاس

کدام عبارت، درست و کدام عبارت، نادرست است؟

$\mathbb{Z} \subseteq Q'$ $\qquad \mathbb{Z} \subseteq Q$ $\qquad \mathbb{N} \subseteq Q'$ $\qquad Q \cap Q' = \varnothing$

فعالیت

الف) بین دو عدد ۱ و ۲ چند عدد گویا می‌توان نوشت؟

ب) اگر این عددها را روی محور نمایش دهیم، متناظر با این عددها، چند نقطه روی محور می‌توان پیدا کرد؟

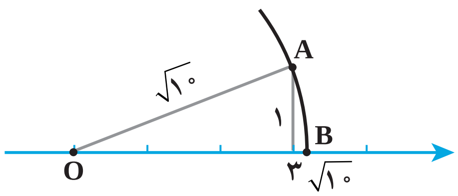
ج) روی محور نقطهٔ نمایش $\sqrt{۲}$ را پیدا کنید.

د) اگر نقاطی را رنگ کنیم که عددی گویا را نمایش می‌دهد، آیا همهٔ نقاط پاره‌خط AB رنگ می‌شود؟ آیا $\sqrt{۲}$ نیز رنگ می‌شود؟ آیا این نقاط، که هر کدام نمایش یک عددگویا است، یک پاره‌خط به‌وجود می‌آورد؟ چرا؟

مثال : نقطه نمایش عدد گنگ $\sqrt{۱۰}$ روی محور به‌صورت زیر است :

به مرکز O و به شعاع OA کمان رسم می‌کنیم. نقطه B روی محور عدد $\sqrt{۱۰}$ را نمایش می‌دهد.

$$OA^۲ = ۳^۲ + ۱^۲ = ۱۰ \Rightarrow OA = \sqrt{۱۰}$$



مثال : $\sqrt{۷}$ بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ قرار دارد.

می‌دانیم ۴ و ۹ دو عدد مجذور کامل قبل و بعد از ۷ است؛ یعنی :

$$۴ < ۷ < ۹ \Rightarrow \sqrt{۴} < \sqrt{۷} < \sqrt{۹} \Rightarrow ۲ < \sqrt{۷} < ۳$$

کار در کلاس

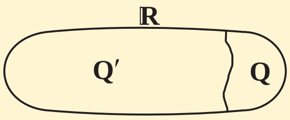
۱ــ بین $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۱۰}$ ، چهار عدد گنگ بنویسید.

۲ــ بین دو عدد ۲ و ۳، چهار عدد گنگ بنویسید.

۳ــ الف) مجموعهٔ A به‌صورت $A = \{x \in Q \mid ۲ \leq x \leq ۳\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به صورت زیر درست است؟

ب) نقطهٔ نمایش $\sqrt{۵}$ را روی محور مشخص کنید.

عددها به دو دسته، عددهای گویا و عددهای گنگ دسته‌بندی می‌شود. اجتماع مجموعهٔ عددهای گویا و عددهای اصم را مجموعه **عددهای حقیقی** می‌نامیم و آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم. داریم : $\mathbb{R} = Q \cup Q'$



مثال :

$۰/۷۵ \in \mathbb{R}$ $\quad -\frac{۵}{۶} \in Q$ $\quad \sqrt{۱۰} \in \mathbb{R}$ $\quad ۰ \in \mathbb{R}$

$\frac{۵}{\sqrt{۲}} \in \mathbb{R}$ $\quad \pi \in \mathbb{R}$ $\quad ۰/۰۲۰۲۲۰۲۲۲۰۲۲۲۲... \in \mathbb{R}$

کار در کلاس

۱ــ داخل ◯ علامت $\in$ یا $\notin$ بگذارید :

$\frac{\sqrt{۷}}{\sqrt{۲}}$ ◯ $\mathbb{R}$ $\quad \sqrt{۱۸}$ ◯ $\mathbb{R}$ $\quad ۰/۲$ ◯ Q $\quad ۴$ ◯ $\mathbb{Z}$

$\frac{۰}{۶}$ ◯ $\mathbb{R}$ $\quad \sqrt{۲۵}$ ◯ Q' $\quad -\frac{۷}{۳}$ ◯ Z $\quad -۵$ ◯ $\mathbb{R}$

$\frac{۹}{-۱}$ ◯ $\mathbb{Z}$ $\quad \sqrt{۰/۰۹}$ ◯ Q $\quad \sqrt{۰/۹}$ ◯ Q' $\quad \sqrt{۳/۵}$ ◯ Q'

۲ــ مجموعه‌های سطر اوّل را به مجموعهٔ مناسب در سطر دوم وصل کنید. هر مجموعه در سطر اوّل با یک مجموعه در سطر دوم مساوی است.

$Q \cap Q'$ $\quad Q \cap Z$ $\quad \mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$ $\quad Q' \cap \mathbb{R}$ $\quad Q \cup Q'$

$\mathbb{Z}$ $\quad \varnothing$ $\quad \mathbb{N}$ $\quad Q'$ $\quad \mathbb{R}$

فعالیت

با توجه به اینکه مجموعهٔ عددهای حقیقی تمام عددها را شامل می‌شود، مجموعه‌های زیر را مانند نمونه روی محور نشان دهید:

با توجه به مجموعهٔ A چرا نقطهٔ ۲ روی محور توپر و نقطهٔ ۳ روی محور توخالی است؟

$A=\{x\in \mathbb{R} \mid ۲\le x<۳\}$

$B=\{x\in R \mid x<-۲\}$

$C=\{x\in R \mid -۱\le x\le ۵\}$

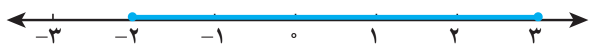
$D=\{x\in R \mid x\ge ۶\}$

کار در کلاس

۱ــ مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید و یا با توجه به محور، مجموعهٔ متناظر آن را بنویسید:

الف) $A=\{x\in R \mid x>-۱\}$

ب) $B=\{\qquad\qquad\}$



ج) $C=\{x\in R \mid x\le ۲\}$

۲ــ با توجه به سه مجموعه A و B و C در سؤال ۱ عبارات درست را با علامت ✓ مشخص کنید:

$\sqrt{۱۳}\in A$ $\qquad ۰/۲۵۲۵۵۲۵۵۵...\in B$ $\qquad ۰/۷۵\in A$

$-۱۰۰۰\in C$ $\qquad \sqrt{۱}\in A$ $\qquad \sqrt{۷}\in C$

۳ــ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با مجموعهٔ نقاط روی شکل زیر، برابر است؟

الف) $\{-۱, ۰, ۱, ۲, ۳\}$

ب) $\{x\in \mathbb{R} \mid x>-۲\}$

ج) $\{x\in \mathbb{R} \mid -۲<x<۳\}$

تمرین

۱ــ با توجه به مجموعه‌های داده شده، سایر سطرها را مانند سطر اوّل کامل کنید :

مجموعهٔ اعداد	$\sqrt{۳/۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	π	$-\frac{۳}{۴}$	۰/۲۹۲۲۹۲۲۲۹....	-۱۰	$\frac{۶}{۲}$
$\mathbb{N}$ طبیعی	×	×	×	×	×	×	×	✓
W حسابی								
$\mathbb{Z}$ صحیح								
Q گویا								
Q' گنگ								
$\mathbb{R}$ حقیقی								

۲ــ در هر یک از حالت‌های الف و ب تفاوت دو مجموعه را با ذکر دلیل بنویسید :

الف) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid ۱/۵ < x < ۵\}$, $B = \{x \in Q \mid ۱/۵ < x < ۵\}$

ب) $C = \{۴,۵,۶,۷,۸\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid ۳ < x < ۹\}$

۳ــ طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید :

۱) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} =$ ۲) $\mathbb{R} - Q' =$ ۳) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} =$ ۴) $\mathbb{R} \cap Q' =$

۴ــ عدد $\sqrt{۵}+۱$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۵ــ بین هر دو عدد، چهار عدد گنگ بنویسید :

الف) ۲- و ۵ ب) ۶ و ۷ ج) $\sqrt{۳}, ۶$ د) $\sqrt{۲}, \sqrt{۴/۱}$

۶ــ عبارات درست را با ✓ و عبارات نادرست را با × مشخص کنید. برای عبارات درست مثال بزنید.

☐ ۱) عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد.

☐ ۲) عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد.

☐ ۳) عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد.

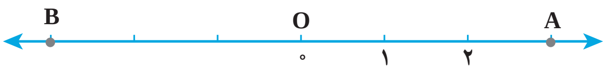
☐ ۴) عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد.

۷ــ در نمایش اعشاری عدد $\sqrt{۱۰}$ و عدد $\frac{۳}{۱۱}$ چه تفاوتی هست؟

درس سوم: قدر مطلق و محاسبهٔ تقریبی

فعالیت

۱ــ با توجه به شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید :



نقاط A و B چه عددی را نمایش می‌دهد؟

فاصلهٔ نقطه A از O یا طول پاره‌خط OA چقدر است؟

فاصلهٔ نقطه B از O یا طول پاره‌خط OB چقدر است؟

می‌خواهیم نقاطی را روی محور بیابیم که فاصله آن از O برابر ۲ باشد.

۲ــ نقطه C را روی محور نمایش دهید به‌طوری که طول OC برابر ۲ باشد؛ چند نقطه می‌توان یافت؟

فاصلهٔ نقطهٔ نمایش عدد a را از مبدأ، **قدر مطلق a** می‌نامیم و با علامت |a| (بخوانید قدر مطلق a) نمایش می‌دهیم؛ بنابراین در مثال بالا می‌توان نوشت : $|-۲| = |۲| = ۲$

مثال : فاصلهٔ نقاط نظیر دو عدد $\frac{۲}{۳}$ و $-\frac{۲}{۳}$ تا مبدأ برابر $\frac{۲}{۳}$ است؛ پس قدر مطلق هر دو عدد $\frac{۲}{۳}$ و $(-\frac{۲}{۳})$ برابر $\frac{۲}{۳}$ است؛ یعنی : $|\frac{۲}{۳}| = |-\frac{۲}{۳}| = \frac{۲}{۳}$

مثال : قدر مطلق $-\sqrt{۵}$ را به‌صورت $|-\sqrt{۵}|$ نشان می‌دهیم که مساوی $\sqrt{۵}$ است. قدرمطلق ۰/۰۴ را به‌صورت |۰/۰۴| نشان می‌دهیم که مساوی ۰/۰۴ است.

قدر مطلق صفر، مساوی صفر و قدر مطلق عددهای مثبت برابر خود آن عدد است. قدر مطلق هر عدد منفی، قرینهٔ آن است. اگر a یک عدد حقیقی باشد :

$$a = ۰ \Rightarrow |a| = ۰$$

$$a > ۰ \Rightarrow |a| = a$$

$$a < ۰ \Rightarrow |a| = -a$$

مثال : به محاسبات زیر توجه کنید :

$$|۱۰ - ۲۰ + ۵| = |-۵| = ۵$$

$$|(-۶) \times (+۱۰)| = |-۶۰| = ۶۰$$

کار در کلاس

۱ــ جملات سمت راست را به عبارات مناسب در سمت چپ وصل کنید :

الف) دو عدد a و b مثبت است. — ۱) $a > 0 , b < 0$

ب) عدد a نامنفی است. — ۲) $a > 0 , b > 0$

ج) دو عدد a و b منفی است. — ۳) $a \geq 0$

د) عدد a مثبت و عدد b منفی است. — ۴) $a < 0 , b < 0$

هـ) عدد a نامثبت است. — ۵) $a \leq 0$

۲ــ هر عبارت سمت راست، نتیجهٔ منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به‌هم وصل کنید :

۱) $ab < 0$ — الف) $a > 0 , b > 0$

۲) $ab > 0 , a + b > 0$ — ب) $a < 0 , b < 0$

۳) $ab > 0 , a + b < 0$ — ج) $a < 0 , b > 0$

۳ــ هر عبارت سمت راست، نتیجهٔ منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به‌هم وصل کنید :

۱) $|a| = -a$ — الف) $a \geq 0$

۲) $|a| = a$ — ب) $a > 0 , b > 0$

۳) $|a + b| = a + b$ — ج) $a < 0$

۴) $|a + b| = -(a + b)$ — د) $a < 0 , b < 0$

۴ــ عبارات زیر را به زبان ریاضی بنویسید و برای هر کدام مثال بنویسید :

۱) قدر مطلقِ حاصل‌ضربِ دو عدد، مساوی با حاصل‌ضرب قدر مطلقِ آنهاست.

۲) قدر مطلقِ مجموع دو عدد، از مجموع قدرمطلق‌های آن دو عدد، کوچک‌تر یا مساوی با آن است.

فعالیت

مقدار تقریبی عددهای زیر تا یک رقم اعشار نوشته شده است :

$\sqrt{8} \simeq 2/8$ $\sqrt{7} \simeq 2/6$ $\sqrt{6} \simeq 2/4$ $\sqrt{5} \simeq 2/2$ $\sqrt{3} \simeq 1/7$ $\sqrt{2} \simeq 1/4$

با توجه به مقادیر تقریبی صفحهٔ قبل، تساوی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید و دلیل خود را توضیح دهید :

$$|۱-\sqrt{۲}|=-(۱-\sqrt{۲})=-۱+\sqrt{۲}=\sqrt{۲}-۱$$

دلیل : $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$ پس $۱-\sqrt{۲}$ عددی منفی می‌شود :

۱) $|۲-\sqrt{۳}|=$ دلیل :

۲) $|\sqrt{۷}-\sqrt{۸}|=$ دلیل :

۳) $|۲\sqrt{۵}-\sqrt{۵}|$ دلیل :

۴) $|-۴-\sqrt{۳}|=$ دلیل :

مثال : اگر $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=\sqrt{۲}$ و $c=-۳$ باشد، حاصل عبارت $|a+b+c|$ را به‌دست می‌آوریم :

$$|a+b+c|=|\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲}+(-۳)|=|-۲/۵+\sqrt{۲}|$$

چون $-۲/۵+\sqrt{۲}$ عددی منفی است $(\sqrt{۲}\simeq ۱/۴)$، پس حاصل عبارت مساوی با $-(-۲/۵+\sqrt{۲})$ یعنی $\sqrt{۲}-۲/۵$ است.

مثال :

$$|\underbrace{۳-\sqrt{۵}}_{\text{مثبت}}|+|\underbrace{-۲-\sqrt{۵}}_{\text{منفی}}|=(۳-\sqrt{۵})-(-۲-\sqrt{۵})$$

$$=۳-\sqrt{۵}+۲+\sqrt{۵}=۵$$

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید :

$\sqrt{a^۲}$	$\sqrt{(-۳)^۲}$	$\sqrt{۳^۲}$	$\sqrt{۶^۲}$	$\sqrt{(-۶)^۲}$	$\sqrt{(-۷)^۲}$	$\sqrt{(-۱۲۷)^۲}$	$\sqrt{۳۲۵^۲}$
حاصل	۳						

از فعالیت بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

با توجه به فعالیت بالا و مفهوم قدرمطلق، می‌توانیم بنویسیم : $\sqrt{a^۲}=|a|$

مثال : برای محاسبهٔ $\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^۲}$ خواهیم داشت :

$$\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^۲}=|\underbrace{۱-\sqrt{۳}}_{\text{منفی}}|=-(۱-\sqrt{۳})=-۱+\sqrt{۳}$$

کار در کلاس

۱ـ عبارت‌های زیر را با هم مقایسه کنید :

الف) $|(-۷)^{۲}|$ ◯ $|-۷|^{۲}$

ب) $|-۸+۵|$ ◯ $|-۸|+|۵|$

ج) $|۳-۹|$ ◯ $|۳|-|۹|$

۲ـ عبارات زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید :

$|۰/۲^{۵}-۰/۲^{۶}|=$ $\qquad |۷^{۳}-۷^{۴}|=$ $\qquad |-\frac{۴}{۳}|=$ $\qquad |۰|=$

۳ـ حاصل عبارات زیر رابه‌دست آورید :

ب) $\sqrt{(۱۳۹۴)^{۲}}=$ $\qquad$ الف) $\sqrt{(-۲۵۹۵)^{۲}}=$

د) $\sqrt{(۲-\sqrt{۵})^{۲}}=$ $\qquad$ ج) $\sqrt{(-۳+\sqrt{۱۰})^{۲}}=$

تمرین

۱ـ اگر $a=۰/۲۵$, $b=-\frac{۱}{۴}$, $c=۲\frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید :

$|a+b|+۲|a-b-c|$

۲ـ عبارات زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید :

الف) $|-۳\sqrt{۵}|$ $\qquad$ ب) $|۷-۵\sqrt{۳}|$ $\qquad$ ج) $|۰+\sqrt{۵}|$

۳ـ جای خالی را با عدد مناسب پر، و جواب‌هایتان را در کلاس با سایر دوستانتان مقایسه کنید :

$|۵-۱۲|>۱+\square$

۴ـ مقدار عددی عبارت $|a|+a$ را به ازای $a=-۲$ ، $a=۰$ و $a=۲$ به‌دست آورید. آیا می‌توانید عددی حقیقی به‌جای a قرار دهید که حاصل $|a|+a$ منفی باشد؟

۵ـ با ارائهٔ یک مثال، نادرست بودن تساوی $\sqrt{a^{۲}}=a$ را نشان دهید.

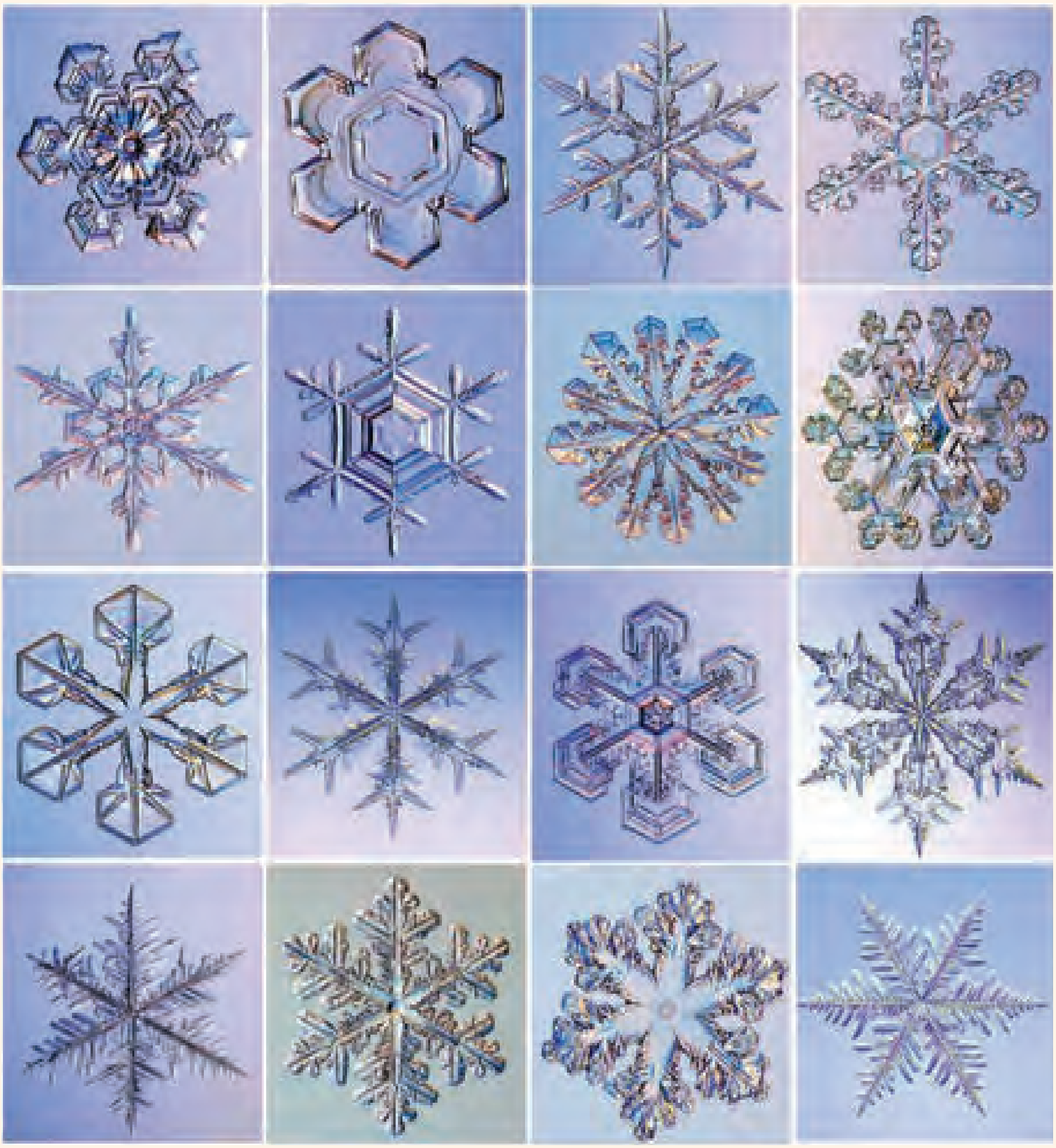
۶ـ حاصل عبارات روبه‌رو را به‌دست آورید : $\sqrt{(۱-\sqrt{۱۰})^{۲}}$ $\qquad$ $\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^{۲}}$

فصل ۳

استدلال و اثبات در هندسه

اُدعُ اِلیٰ سَبیلِ رَبِّکَ بِالحِکمَةِ وَ المَوعِظَةِ الحَسَنَةِ وَ جادِلهُم بِالَّتی هِیَ اَحسَنُ ...

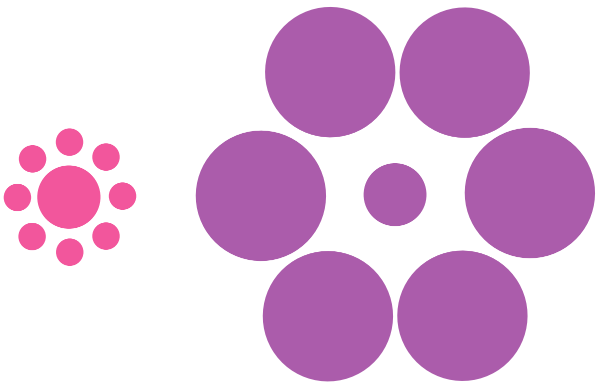
با حکمت و اندرز نیکو به راه پروردگارت دعوت نما و با آنها به نیکوترین روش استدلال و مناظره کن! (سورهٔ نحل، آیهٔ ۱۲۵)



بارش برف از آسمان، رحمت الهی را با خود به زمین می‌آورد و در عین حال نماد زیبایی زمستان است. اما شاید جالب باشد بدانید که این دانه‌های زیبای متقارن که اغلب شش شاخه هستند، علی‌رغم آنکه میلیاردها دانه‌اند، امّا هر کدام شکل منحصر به خود را دارند و به نظر می‌رسد هیچ دو تایی از آنها «هم‌نهشت» نیستند!

درس اوّل: استدلال

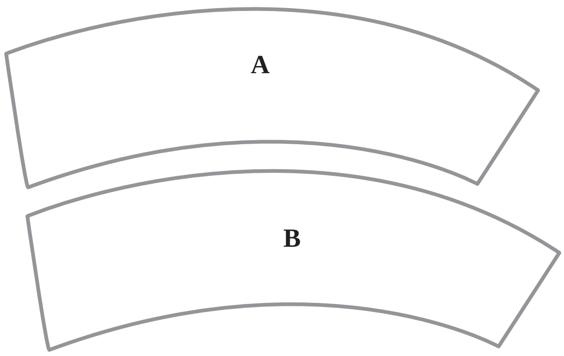
فعالیت



۱ــ کدام یک از دو قرصی که در مرکز قرار گرفته، بزرگ‌تر است؟

الف) با مشاهده تشخیص دهید.

ب) یک کاغذ روی یکی از آنها قرار دهید. دایرهٔ محیط آن قرص را بکشید و با گذاشتن تصویر کشیده شده بر شکل دیگر، اندازهٔ آنها را با هم مقایسه کنید.



۲ــ اگر قطعه‌های A و B قطعه‌هایی از شیرینی موردعلاقهٔ شما باشد، کدام قطعه را انتخاب می‌کنید؟ (قطعهٔ بزرگ‌تر کدام است؟)

با یک کاغذ شفاف این دو قطعه را مقایسه کنید؟ آیا حدس شما درست بود؟

۳ــ آیا مشاهده کردن یا به‌طورکلی استفاده از حس‌های پنج‌گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع کافی است؟ چرا؟

هرچند به‌طور معمول در ریاضیات و به‌ویژه در هندسه استفاده از شکل، ترسیم و شهود به تشخیص راه‌حل‌ها و ارائهٔ حدس‌های درست کمک زیادی می‌کند، امّا به تشخیصی که براساس این روش‌ها حاصل می‌گردد، نمی‌توانیم به‌طور کامل اطمینان کنیم.

کار در کلاس

مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطا می‌کند. در مورد نتایجی که از این مثال‌ها می‌گیرید، با یکدیگر بحث کنید.

فعالیت

متن‌های زیر را بخوانید و به سؤال‌ها پاسخ دهید :

۱ــ امیر و محسن برای دیدن مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت : «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقهٔ من امروز هم می‌بازد.» امیر پرسید : «چگونه با این اطمینان حرف می‌زنی؟» محسن دلیل آورد که : «چون هر بار که به ورزشگاه رفته‌ام، تیم مورد علاقه‌ام باخته است.»

آیا دلیلی که محسن آورده است، درست است؟ چرا؟

۲ــ عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتی‌متر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع، به همان ضخامت و مربع شکل به ضلع ۶ سانتی‌متر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است.

۳ــ دلیلی را که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده است، با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آوردید مقایسه کنید. به‌نظر شما کدام قابل اطمینان‌تر است؟

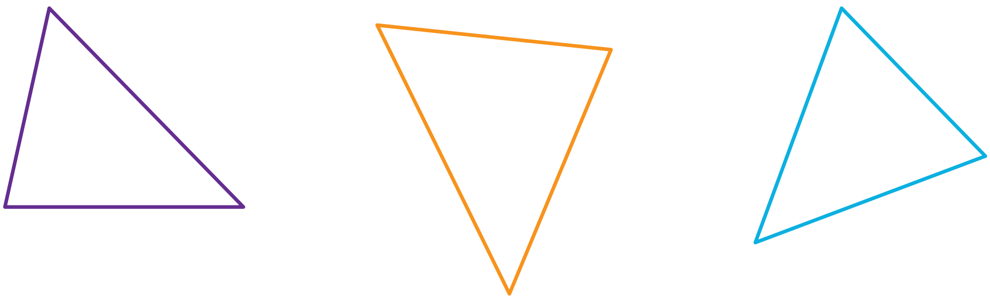
«استدلال» یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

همان‌گونه که در این موارد مشاهده کردید، حتی در بسیاری از کارهای روزمره نیز به استدلال نیاز پیدا می‌کنیم. راه‌های متفاوتی برای استدلال کردن هست که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می‌تواند یکسان نباشد. به استدلالی که موضوع موردنظر را به‌درستی نتیجه بدهد، اثبات می‌گوییم.

کار در کلاس

۱ــ مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی با توجه به رویدادهای گذشته، نتیجه‌ای می‌گیرد که درست نیست.

۲ــ دو ارتفاع از هر یک از مثلث‌های زیر، رسم کنید :



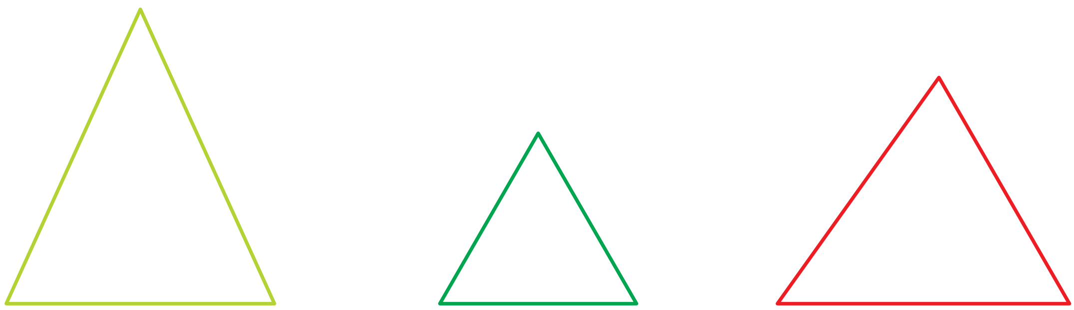
آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث، محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث است؟

یک مثال بزنید که نتیجهٔ بالا را نقض کند.

اگر فردی با رسم ارتفاع‌های موردنظر در مثلث‌ها چنین نتیجه‌گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون آن مثلث است، استدلال او مشابه کدام استدلال دو قسمت فعالیت قبل است؟

تمرین

۱ــ در شکل‌های زیر عمودمنصف‌های سه ضلع مثلث‌ها را رسم کنید :



آیا فقط با توجه به این شکل‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمودمنصف‌های هر مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می‌توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟

۲ــ نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه‌برداری بودند. وزنه‌برداری می‌خواست وزنه‌ای ۱۰۰ کیلویی را بلند کند. آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی‌تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

نیما : زیرا هفتهٔ پیش این وزنه‌بردار تمرینات بهتری انجام داده بود، با این‌حال نتوانست وزنهٔ ۹۰کیلویی را بلند کند.

پژمان : امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه بردار را دیده‌ام. او هیچ‌گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ دربارهٔ استدلال‌ها بحث کنید.

۳ــ چون من تا به‌حال هیچ‌وقت تصادف نکرده‌ام، در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد.

این استدلال مشابه کدام‌یک از استدلال‌های زیر است؟

الف) چون برخی مثلث‌ها قائم‌الزاویه‌اند؛ پس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هم قائم‌الزاویه‌اند.

ب) همهٔ فیلم‌های جنگی که تاکنون دیده‌ام، جذاب بوده‌اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود، پس فیلم جنگی بوده است.

ج) چون تمام بچه‌های خاله‌های من دختر هستند، پس بچهٔ خالهٔ کوچکم هم که به زودی به دنیا می‌آید دختر خواهد بود.

د) چون همهٔ قرص‌های مسکن خواب‌آور است، پس در این قرص‌ها ماده‌ای هست که باعث خواب‌آلودگی می‌شود.

۴ــ حمید و وحید می‌دانستند که علی، حسن، حسین و باقر برادرند و : علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از باقر کوچک‌تر است و باقر از علی کوچک‌تر و حسن نیز از حسین کوچک‌تر است. هر دو نفر اعتقاد داشتند که علی از حسن بزرگ‌تر است؛ اما استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

حمید : در تمام خانواده‌هایی که دو فرزند به نام‌های علی و حسن داشته‌اند، علی فرزند بزرگ‌تر بوده است.

وحید : چون علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از حسین کوچک‌تر است، پس علی از حسن بزرگ‌تر است.

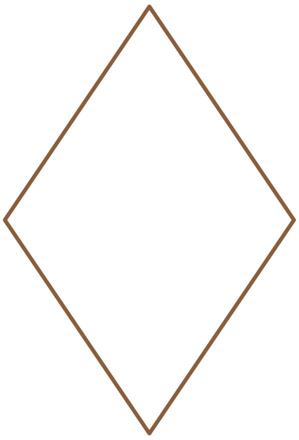
استدلال کدام یک درست است؟ دربارهٔ درستی استدلال‌ها بحث کنید.

۵ــ معلم از دانش‌آموزان خواست با استدلال ریاضی ثابت کنند که در مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به قاعده با هم برابرند. احمد زاویه‌ها را با نقاله اندازه‌گیری کرد و نتیجه گرفت که زاویه‌ها مساوی هستند. چرا این روش برای اثبات کردن درست نیست؟ چرا اندازه‌گیری روش مناسبی برای نتیجه‌گیری نیست؟

درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

در درس گذشته آموختید که دیدن و استفاده از حواس یا ارائهٔ مثال‌های متعدد و همچنین توجه به ابعاد ظاهری برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و قانع‌کننده کمک گرفت و با استدلال، درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلالمان از اطلاعاتِ مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است، برای رسیدن به خواستهٔ مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

فعالیت



۱ـ به گفت‌وگوی زیر توجه کنید :

مهرداد : آیا در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو با هم برابر است؟

سعید : بله، من در یک کتاب هندسه دیدم که اثبات کرده بود در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، با هم مساوی است و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.

در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را در زیر کامل کنید :

فرض : شکل لوزی است.

حکم : ــــــــ برابر است.

استدلال :

لوزی نوعی ــــــــ است.

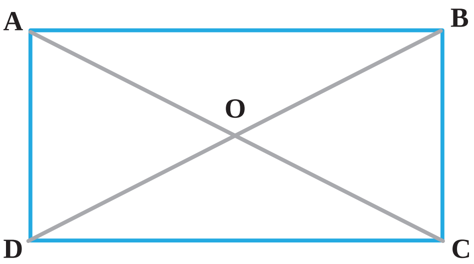
در متوازی‌الاضلاع ــــــــ برابر است.

$\Rightarrow$ در لوزی زاویه‌های روبه‌رو ــــــــ

۲ـ اولین اقدامی که برای اثبات انجام می‌دهیم، تشخیص فرض، حکم و واقعیت‌های مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئلهٔ زیر فرض، واقعیت‌های از قبل ثابت شده یا دانسته و حکم را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید :

فرض : ABCD مستطیل است.

حکم : قطرهای مستطیل، مساوی است.



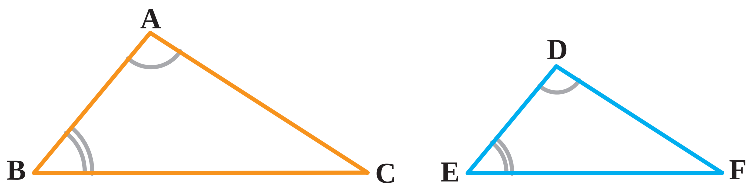
فرض و دانسته‌های قبلی :
$\hat{A} =$ ــــ $=$ ــــ $=$ ــــ $= 90^\circ$
AD= ــــ ، AB = ــــ
AB|| ــــ ، AD|| ــــ

حکم : AC= ــــ

کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید :

۱ــ در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است. ثابت کنید زاویه‌های سوم از دو مثلث نیز با هم برابر است.



فرض : ــــ = ــــ
ــــ = ــــ

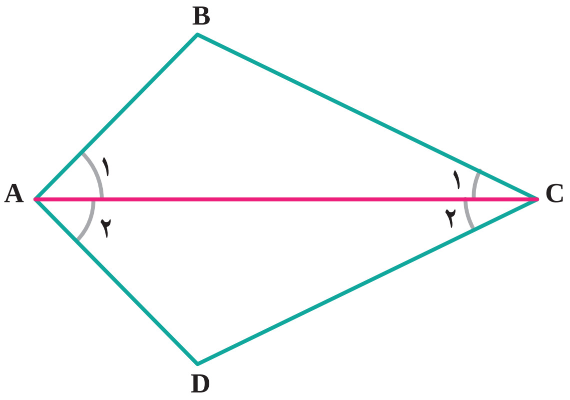
حکم : ــــ = ــــ

۲ــ اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشد، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر. (ابتدا شکل را رسم کرده و نام‌گذاری کنید).

۳ــ نشان دهید در هر مثلث اندازهٔ هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن برابر است.

فعالیت

۱ــ در مسئلهٔ زیر، فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیابید، سپس استدلال درستی برای آن بنویسید.

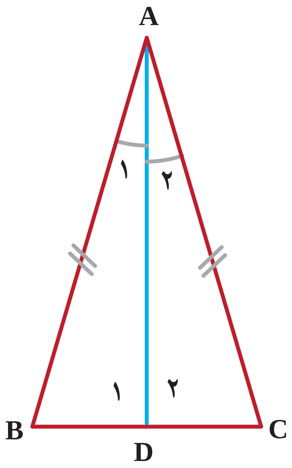


مسئله : در شکل مقابل پارخط AC نیمساز زاویهٔ A است و اضلاع AB و AD برابرند. ثابت کنید مثلث‌های مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{ADC}$ هم‌نهشت‌اند.

حکم: **: فرض**

استدلال : چون AC نیمساز است، داریم $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ و $\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$ و از طرفی AC نیز ضلع مشترک در هر دو مثلث است، لذا دو مثلث ABC و ADC به حالت دو زاویه و ضلع بین (زض‌ز) هم‌نهشت‌اند.

۲ــ مثلث زیر متساوی‌الساقین و AD نیمساز وارد بر قاعدهٔ آن است. با استدلال زیر نشان داده‌ایم که نیمساز وارد بر قاعده، میانه نیز می‌باشد.



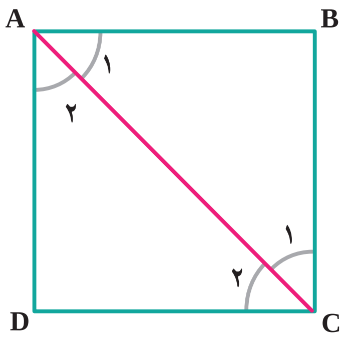
(ض ز ض)

$$\left.\begin{array}{ll} AB = AC & \text{(ساق‌های برابر)} \\ A_۱ = A_۲ & \text{(نیمساز است AD)} \\ AD = AD & \text{(ضلع مشترک)} \end{array}\right\} \Rightarrow ABD \cong ACD \Rightarrow BD = CD$$

لذا نقطهٔ D وسط BC است و AD میانه است.

آیا در مثلث ABC می‌توان نتیجه گرفت که نیمساز زاویهٔ B نیز میانهٔ ضلع مقابل آن است؟ به عبارتی، آیا می‌توان خاصیت اثبات شده برای نیمساز A را به نیمساز دیگر تعمیم داد؟

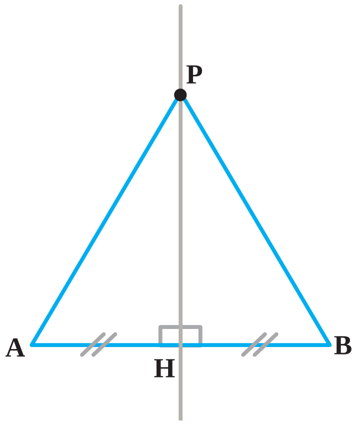
۳ــ با استدلال زیر به سادگی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که قطر AC از مربع ABCD نیمساز زاویه‌های A و C است. چون دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع هم‌نهشت‌اند و زوایای متناظر با هم برابرند؛ بنابراین $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ و $\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$ و لذا AC نیمساز است.



آیا می‌توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر نیز تعمیم داد و گفت به‌طور کلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه‌های دو سر آن قطر است؟

۴ــ به‌نظر شما چرا در فعالیت ۲ خاصیت موردنظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود؛ اما در فعالیت ۳ خاصیت موردنظر به قطر دیگر تعمیم داده می‌شود؟

وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام ویژگی‌هایی که در استدلال خود به‌کار برده‌ایم، در سایر عضوهای آن مجموعه نیز باشد، می‌توان درستی نتیجه را به همهٔ عضوهای آن مجموعه تعمیم داد.



۵ــ نقطه‌ای مانند P، روی عمودمنصف پاره‌خط AB در نظر می‌گیریم و به دو سر پاره‌خط وصل می‌کنیم. چون دو مثلث AHP و BHP به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند، نتیجه می‌گیریم پاره‌خط‌های PA و PB با هم برابر است.

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ P، که روی عمودمنصف پاره‌خط AB است، از دو سر پاره‌خط AB یکسان‌اند.

آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجهٔ بالا برای «هر» نقطهٔ روی عمودمنصف برقرار است، کافی است؟

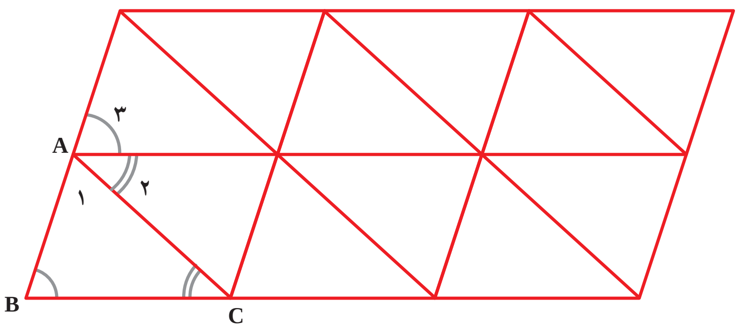
کار در کلاس

به استدلال‌هایی دقت کنید که چهار دانش‌آموز برای مسئلهٔ زیر آورده‌اند:

مسئله: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث 180° است.

استدلال حامد: حامد گفت یک مثلث متساوی‌الاضلاع را درنظر می‌گیریم؛ چون سه زاویه دارد و هر زاویه 60° است، مجموع زاویه‌های مثلث 180° است.

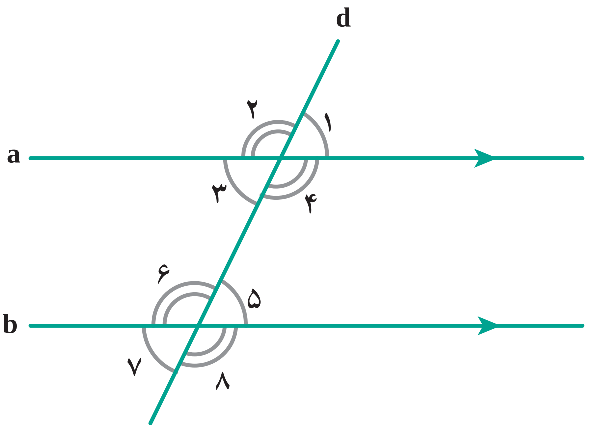
استدلال حسین: حسین چند مثلث مختلف با حالت‌های گوناگون کشید و زوایای آنها را اندازه گرفت و دید که در همهٔ آنها مجموع زوایای داخلی برابر 180° است و نتیجه گرفت که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.



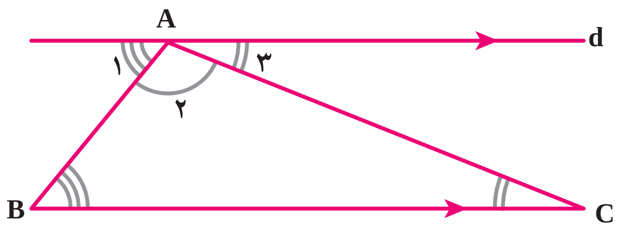
استدلال مهدی: مهدی شکل روبرو را، که از مثلث‌های هم‌نهشت تشکیل شده است کشید و با مشخص کردن زاویه‌های مثلث ABC مانند شکل

استدلالی با استفاده از شکل به‌صورت زیر آورد :

$$\hat{A}_۱+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_۱+\hat{A}_۳+\hat{A}_۲=۱۸۰^\circ$$



استدلال رضا : رضا گفت می‌دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند، با آنها هشت زاویه می‌سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساوی‌اند».



حال مثلثی دلخواه مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ را درنظر می‌گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می‌کنیم. سه زاویهٔ تشکیل شده در رأس A را با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ نشان داده‌ایم که زاویهٔ $A_۲$ همان زاویهٔ A در مثلث است و با درنظر گرفتن AB به‌عنوان مورّب داریم : $\hat{B}=\hat{A}_۱$ و با درنظرگرفتن AC به‌عنوان مورب داریم : $\hat{C}=\hat{A}_۳$ پس با جای‌گذاری $\hat{A}_۱$ و $\hat{A}_۳$ به‌ترتیب به جای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ خواهیم داشت : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_۲+\hat{A}_۱+\hat{A}_۳=۱۸۰^\circ$

استدلال رضا را می‌توان با استفاده از نمادهای ریاضی مرتّب و خلاصه کرد و بدین‌صورت نوشت :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}d \parallel BC\\ \text{و}\\ \text{مورب}\ AB\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}=\hat{A}_۱\\ \left.\begin{array}{r}d \parallel BC\\ \text{و}\\ \text{مورب}\ AC\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{C}=\hat{A}_۳\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_۲+\hat{A}_۱+\hat{A}_۳=۱۸۰^\circ$$

دربارهٔ معتبر بودن استدلال‌های این دانش‌آموزان بحث کنید.

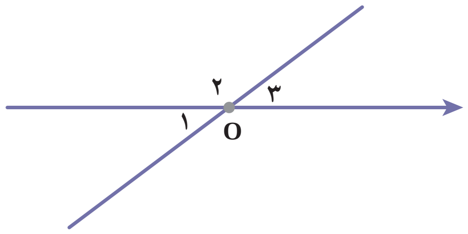
فعالیت

مسئله : حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول‌های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول‌های سعید و بهرام نیز برابر ۵۰۰۰ تومان است. به‌نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

بین استدلالی که برای مسئلهٔ قبل و مسئلهٔ بعدی هست، چه شباهتی می‌بینید؟

مسئله : نشان دهید زاویه‌های متقابل به رأس با هم برابرند.

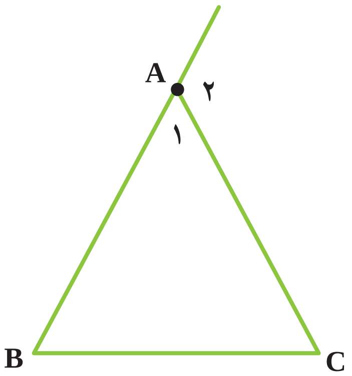
فرض کنیم $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_3$ مانند شکل زیر متقابل به رأس باشد، داریم :



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1+\hat{O}_2=180^\circ\\ \hat{O}_3+\hat{O}_2=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{O}_1+\hat{O}_2=\hat{O}_3+\hat{O}_2\Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_3$$

تمرین

۱ــ آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.



مسئله : در هر مثلث، اندازهٔ زاویهٔ خارجی با مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با آن برابر است.

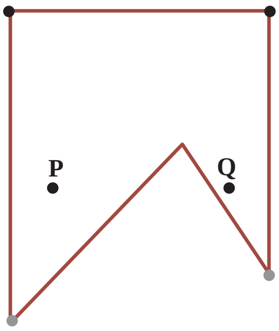
اثبات : مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را درنظر می‌گیریم.

می‌دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است و زوایای $\hat{A}_1$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هر کدام 60° است؛ بنابراین

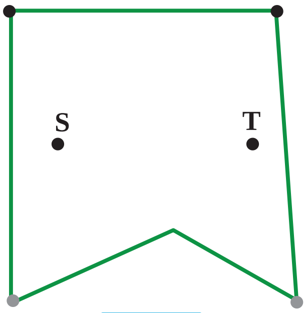
$$\hat{A}_1+\hat{A}_2=180\rightarrow \hat{A}_2=180-\hat{A}_1=180-60=120$$

$$\hat{B}+\hat{C}=60+60=120 \qquad \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{B}+\hat{C}$$

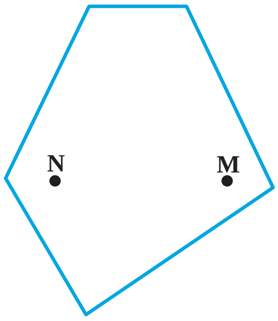
۲ــ در سال گذشته با تعریف چند ضلعی‌های محدب آشنا شدید. تعریف چندضلعی محدب را می‌توان بدین صورت هم آورد : «یک چندضلعی محدب است؛ اگر هر پاره‌خطی که دو نقطهٔ دلخواهِ درون آن چندضلعی را به‌هم وصل می‌کند، به‌طور کامل درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» هر ضلعی که محدب نباشد، مقعر است. آیا تشخیص‌های سه دانش‌آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی‌های زیر و دلایلی که ارائه کرده‌اند، با توجه به تعریف بالا درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.



نرگس : چند ضلعی مقابل محدب نیست؛ زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد اما پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می‌کند، به‌طور کامل در آن قرار نمی‌گیرد.



مهدیه : چندضلعی مقابل محدب است؛ زیرا نقاط T و S درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می‌کند، نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد.



مریم : چندضلعی مقابل محدب است؛ زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می‌کند، نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد.

۳ــ آیا استدلال‌های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

الف) هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.
چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. ⇐ ABCD مستطیل است.

ب) در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.
ABCD مربع نیست. ⇐ همهٔ ضلع‌های ABCD، با هم برابر نیستند.

ج) در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.
در چهارضلعی ABCD ضلع‌ها برابر نیستند. ⇐ ABCD مربع نیست.

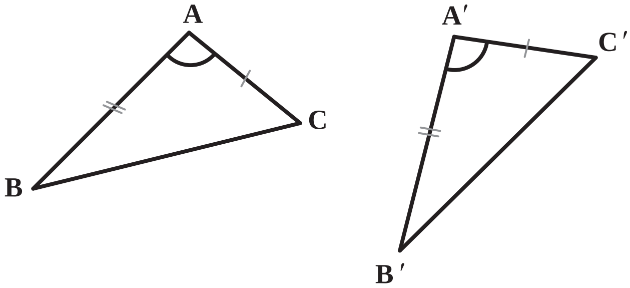
۴ــ ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

یادآوری : فاصلهٔ یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خطی که از آن نقطه بر خط عمود می‌شود.

راهنمایی : یک زاویهٔ دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم، و یک نقطه روی این نیمساز مشخص کنید. ثابت کنید فاصلهٔ این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس دلیل آن‌را که این نتیجه برای همهٔ نقاطِ روی نیمساز درست است، بیان کنید.

یادآوری

با مفهوم هم‌نهشتی مثلث‌ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می‌خواهیم این حالت‌ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه نویسی کنیم؛ مثلاً حالت هم‌نهشتی(ض ز ض) را این‌گونه نمایش می‌دهیم :

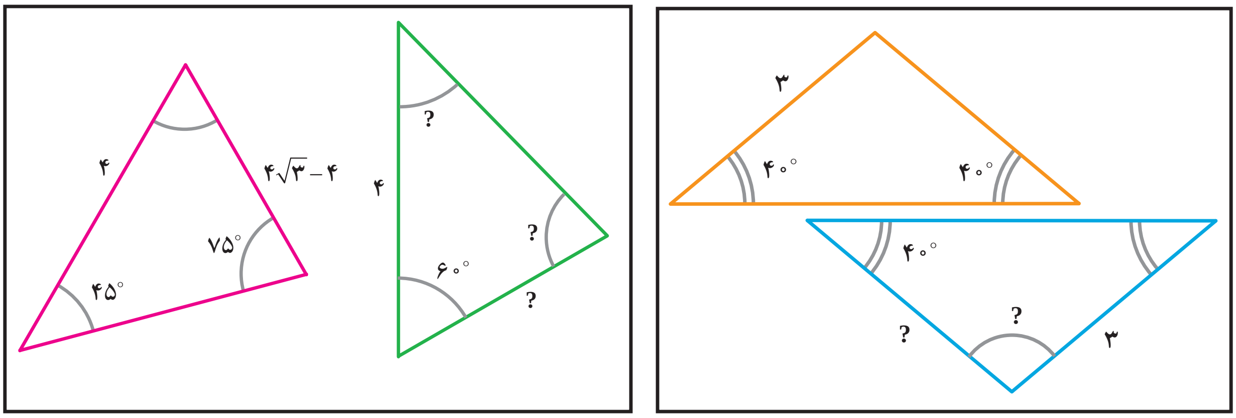


$$\left.\begin{aligned} AB &= A'B' \\ \hat{A} &= \hat{A'} \\ AC &= A'C' \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

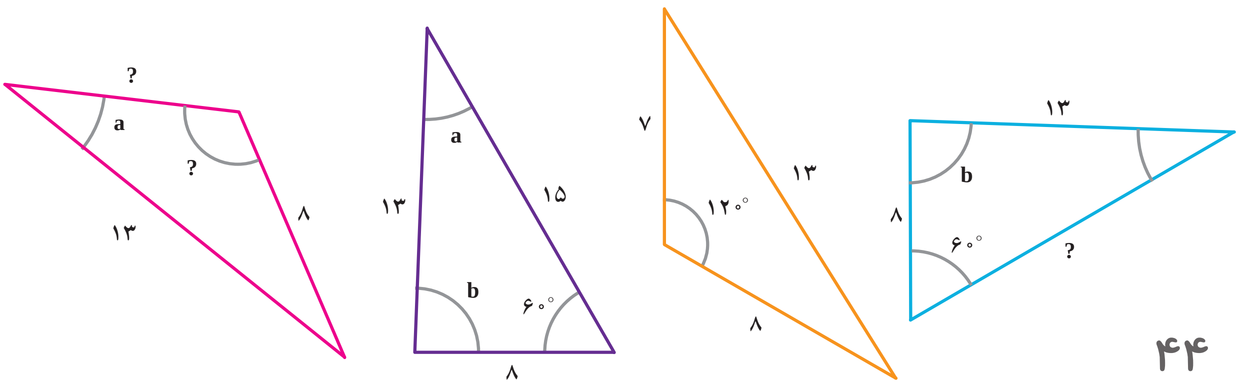
برای یادآوری، دو حالت دیگر هم‌نهشتی مثلث‌ها و دو حالت هم‌نهشتی ویژهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه را به همین صورت بیان کنید.

فعالیت

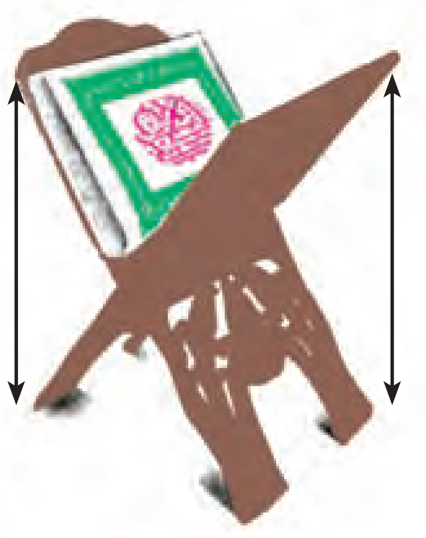
۱ــ در شکل‌های زیر، دو مثلثِ داخل هر کادر با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. اندازهٔ پاره‌خط‌ها و زاویه‌های مجهول را روی شکل مشخص کنید :

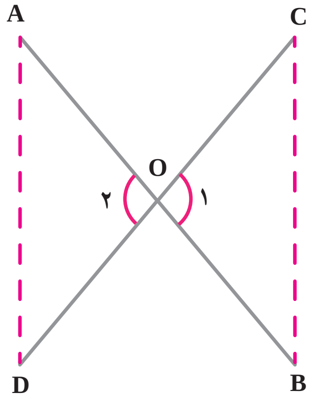


۲ــ در شکل زیر چهارمثلث رسم شده که دو به دو با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. ابتدا مثلث‌های هم‌نهشت را مشخص کنید و سپس اندازه‌های مجهول را که با «؟» مشخص شده، تعیین نمایید (زاویه‌هایی که با یک حرف مشخص شده با هم مساوی است).



مثال : با رحل‌های قرآنی، حتماً آشنایی دارید. در نمونه‌ای از آنها دو لایهٔ چوبی آن از وسط یکدیگر گذشته است. می‌خواهیم نشان دهیم که این تکیه‌گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصلهٔ دو لبهٔ کناری آن در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است : OA=OB و OC=OD (چرا؟) و حکم این است : AD=BC. زوایای $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۲$ برابرند (چرا؟)، پس مثلث‌های OAD و OBC هم‌نهشت هستند و از آنجا درستی حکم به‌دست می‌آید؛ یعنی :

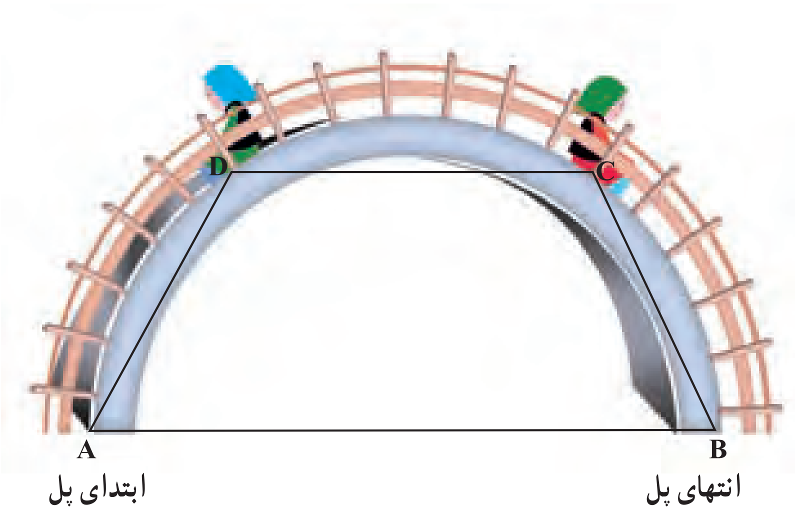


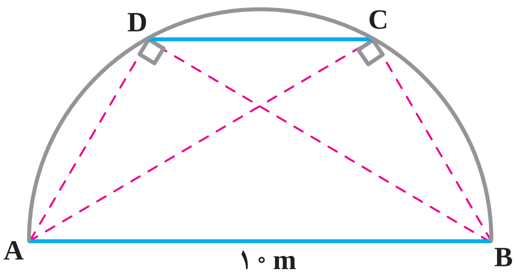


$$\left.\begin{array}{r} OA = OB \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ OC = OD \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{OBC} \cong \overset{\Delta}{OAD} \Rightarrow AD = BC$$

فعالیت

در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، بوستانی هست که در آن یک پل فلزی به شکل نیم‌دایره وجود دارد بچه‌ها برای بازی از پله‌های آن بالا می‌روند. می‌دانیم فاصلهٔ ابتدای پل (نقطهٔ A) از انتهای آن (نقطهٔ B) ۱۰ متر است. ترانه روی پلهٔ C نشسته است که از انتهای پل ۶ متر فاصله دارد (BC=۶) و شهرزاد روی پلهٔ D نشسته است که از ابتدای پل همین مقدار فاصله دارد. آنها حدس می‌زنند که باید فاصله‌شان از پایه‌های مقابل برابر باشد؛ یعنی AC=BD. درستی حدس آنها را به دو روش ثابت کنید.

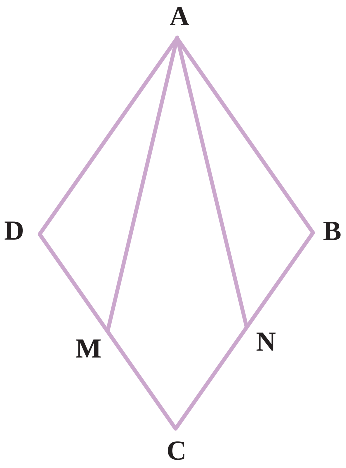




۱ــ نشان دهید زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{D}$ در شکل، قائمه است. طول‌های AC و BD را به کمک قضیهٔ فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید : AC=BD

۲ــ به کمک هم‌نهشتی مثلث‌های ACB و ADB، نشان دهید AC=BD.

فعالیت



در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه‌های M و N وسط‌های اضلاع CD و CB هستند. می‌خواهیم نشان دهیم $\overset{\Delta}{ADM} \cong \overset{\Delta}{ABN}$

۱ــ با توجه به ویژگی‌های لوزی، تساوی‌های زیر را کامل کنید :

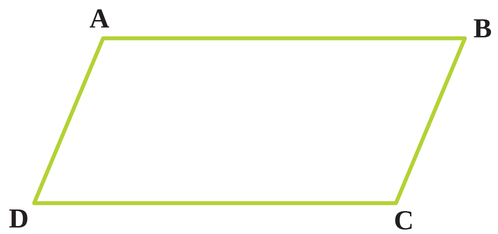
فرض $\begin{cases} AD = AB = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ \quad , \quad BN = \_\_\_\_ \\ \hat{A} = \_\_\_\_ \;,\; \hat{B} = \_\_\_\_ \quad , \quad DM = \_\_\_\_ \end{cases}$

حکم : $\overset{\Delta}{ADM} \cong \overset{\Delta}{ABN}$

۲ــ با توجه به نتیجهٔ قسمت (۱) و تساوی‌های قسمت اوّل، ثابت کنید مثلث‌های ABN و ADM هم‌نهشت‌اند.

۳ــ حال با توجه به هم‌نهشتی دو مثلث ABN و ADM، اجزای متناظر آنها را بنویسید.

کار در کلاس



می‌خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی‌الاضلاع، مانند شکل روبه‌رو، ضلع‌های مقابل، همواره با هم برابرند. مفروضات و داده‌های مسئله چیست؟ تمام آنها را بنویسید؛ حکم مسئله چیست؟ نظر دو دانش‌آموز را دربارهٔ این مسئله ببینید و به سؤال‌های مطرح شده پاسخ دهید.

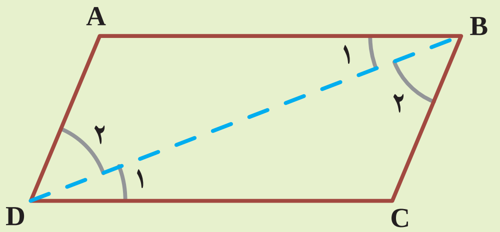
شهرزاد : معلوم است که ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی است؛ با چشم هم می‌توان دید!

شبنم : می‌دانیم که در تعریف متوازی‌الاضلاع، برابری ضلع‌های روبه‌رو آورده شده است. علاوه بر آن با اندازه‌گیری هم می‌توانیم این موضوع را نشان دهیم.

● آیا می‌توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم‌هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟

● به تعریف متوازی‌الاضلاع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید. آیا برابری اضلاع مقابل در این تعریف وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه‌گیری اضلاع مقابل، برابری آنها را ببینیم، درستی حکم را ثابت کرده‌ایم؟ چرا؟

ترانه : به نظر من باید دو مثلث هم‌نهشت بیابیم و با اثبات هم‌نهشتی آنها به برابری اضلاع مقابل در متوازی‌الاضلاع برسیم؛ امّا در شکل دو مثلث نداریم، پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطرها، دو مثلث ایجاد می‌کنیم.



اثبات را به‌صورت زیر کامل کنید :

$AB \parallel CD$، مورب ــــ $\Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱$

$BD =$ ــــ (ضلع مشترک)

ــــ و BD مورب $\Rightarrow$ ــــ $=$ ــــ

$\xRightarrow{\text{(ز ض ز)}}$ Δ ــــ $\cong$ Δ ــــ

با توجه به هم‌نهشتی دو مثلث ABD و CBD، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

دیدیم که $\hat{B}_۱ = \hat{D}_۱$ است؛ بنابراین داریم : $AD =$ ــــ

و $\hat{B}_۲ = \hat{D}_۲$ است؛ بنابراین داریم : $AB =$ ــــ

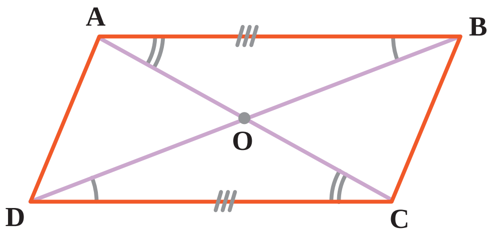
● چرا برای اثبات هم‌نهشتی مثلث‌های ایجاد شده، نمی‌توانیم از حالت‌های (ض ز ض) و (ض ض ض) استفاده کنیم؟

● با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می‌توانستیم همین نتیجه را با رسم قطر AC به‌دست آوریم؟

● از هم‌نهشتی مثلث‌های ایجاد شده در متوازی‌الاضلاع، به‌جز برابری ضلع‌های مقابل، نتیجهٔ دیگری هم دربارهٔ زاویه‌های متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید؛ این نتیجه را بنویسید.

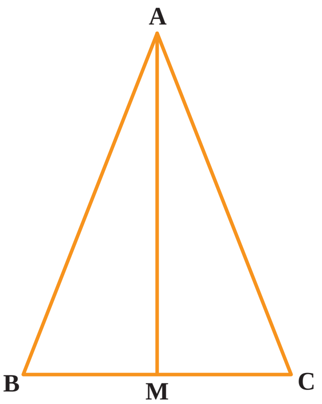
● در هر متوازی‌الاضلاع .... روبه‌رو، مساوی‌اند.

تمرین

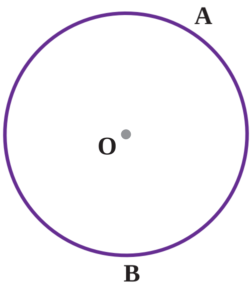


۱ــ ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید : $OA = OC$ و $OB = OD$.

۲ــ ثابت کنید در هر مستطیل، قطرها با یکدیگر برابرند. (مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است!)



۳ــ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم. مثلث‌های AMB و AMC به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ چرا AM نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است؟ چرا AM بر BC عمود است؟

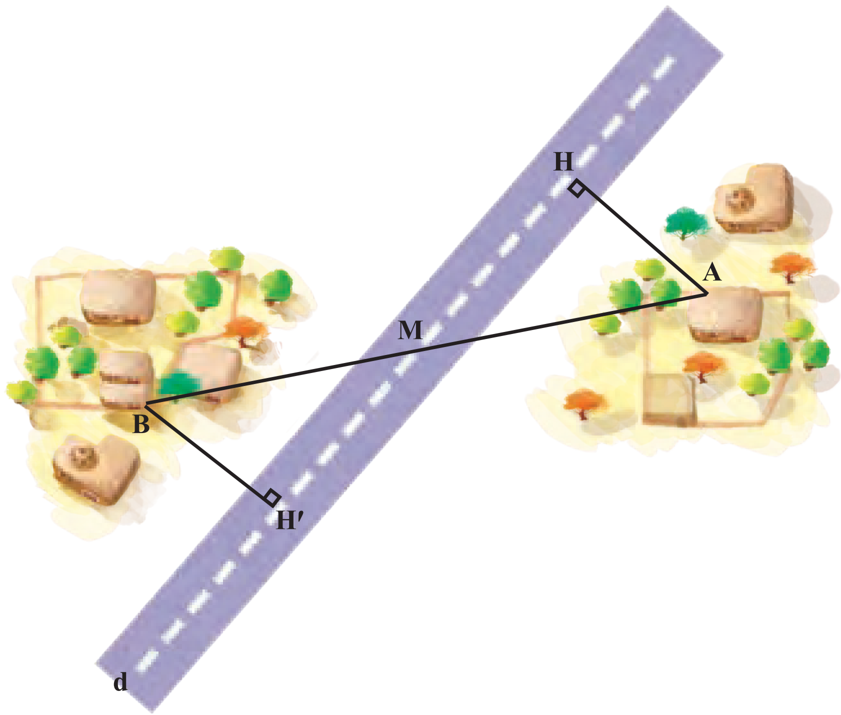


۴ــ از نقطهٔ M خارج از دایره، دو مماسِ MA و MB را بر دایره رسم کنید. آیا اندازهٔ این دو مماس با هم برابر است؟ درستی ادعای خود را نشان دهید. (**راهنمایی** : از مرکز دایره به نقطه‌های M ، A و B وصل کنید.)

درس چهارم: حل مسئله در هندسه

برای حل مسائل هندسی، راه حل کلّی وجود ندارد؛ امّا می‌توان مراحلی را مشخص کرد که برای حل مسئلهٔ هندسه، توصیه می‌شود. این مراحل را در حل یک مثال کاربردی معرفی می‌کنیم.

مثال : دو روستای A و B با یک جادّهٔ خاکی مستقیم به هم وصل هستند. در آن منطقه یک جادّهٔ آسفالتهٔ مستقیم ساخته شد که دو روستا در دو طرف آن واقع شد و جادهٔ آسفالته درست از وسط جادّهٔ خاکی عبور می‌کرد. ادارهٔ راه‌سازی تصمیم گرفته است که از هر روستا، یک جادّهٔ آسفالته با کوتاه‌ترین فاصلهٔ ممکن تا جادّهٔ اصلی بسازد. بنابراین از روستای A یک جادّهٔ مستقیم، عمود بر این جادّهٔ اصلی و به طول چهار کیلومتر ساخته شد. برای برآورد هزینه‌های ساخت جادّهٔ دیگر از روستای B، مهندسان پیش‌بینی کرده‌اند که فاصلهٔ روستای B از جاده نیز همین مقدار است؛ یعنی $AH=BH'$.



قدم‌های حل مسئله

۱ــ صورت مسئله را به‌دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل‌دهندهٔ آن را بشناسید. در این مسئله با مفاهیمی همچون خط، پاره خط و فاصلهٔ نقطه تا خط سروکار داریم. آیا با آنها آشنایی دارید؟

۲ــ اگر مسئله فاقد شکل است، با توجه به‌صورت مسئله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید.

در اینجا شکل این مسئله را با توجه به طرح بالا رسم کنید.

۳ــ داده‌های مسئله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را تشخیص دهید و در یک جدول بنویسید. دراینجا فرض‌های اصلی این است که M وسط AB است؛ یعنی MA=MB است و AH و BH′ بر d عمودند و حکم این است : AH=BH′

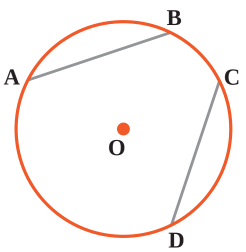
فرض	MA=MB , $\hat{H}=\hat{H'}=۹۰^\circ$
حکم	AH=BH′

۴ــ برای رسیدن از فرض به حکم، راه حلی پیدا کنید. روش‌های مختلفی برای این کار هست که آنها را به مرور می‌آموزید. یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره‌خط، استفاده از مثلث‌های هم‌نهشت است. در این شکل، کدام دو مثلث، برای این منظور مناسب است؟

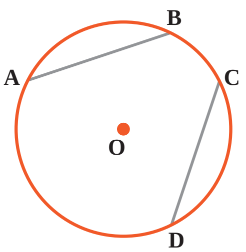
با توجه به فرض و حکم مسئله، اثبات را با نمادهای ریاضی کامل کنید :

$$\left.\begin{array}{r} MA = MB \text{ (طبق فرض)} \\ \hat{H}=\hat{H'}=۹۰^\circ \\ (\_\_\_)\ \ \hat{\_\_}=\hat{\_\_} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(وتر و یک زاویهٔ حاده)}} \overset{\Delta}{\_\_\_} \cong \overset{\Delta}{\_\_\_} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} AH = BH'$$

فعالیت



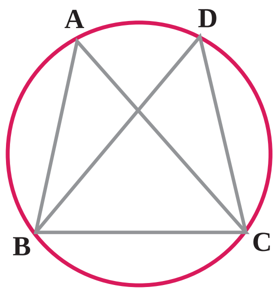
۱ــ در شکل مقابل وترهای AB و CD با هم مساوی‌اند.
نشان دهید کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ مساوی‌اند.



۲ــ در شکل مقابل کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ مساوی‌اند. نشان دهید وترهای AB و CD با هم برابرند.

در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آنها با هم برابرند و اگر دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر آنها نیز با هم برابرند.

کار در کلاس



در شکل مقابل می‌دانیم AB=CD،

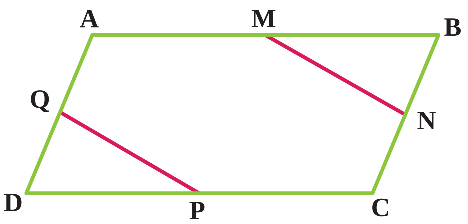
۱ــ چرا $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ ؟

۲ــ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پرکنید :

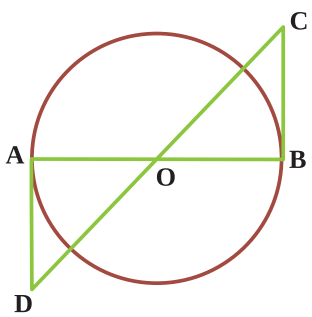
$$\begin{cases}\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}\\ \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BC}\end{cases}$$
$$\overline{}$$
$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BC}\Rightarrow \underline{\qquad}=\underline{\qquad}$$

۳ــ چرا AC=BD؟

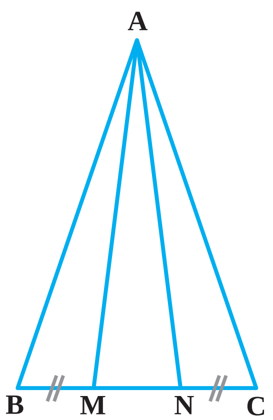
تمرین



۱ــ در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است و M و N و P و Q وسط‌های اضلاع متوازی‌الاضلاع‌اند، ثابت کنید : MN=PQ



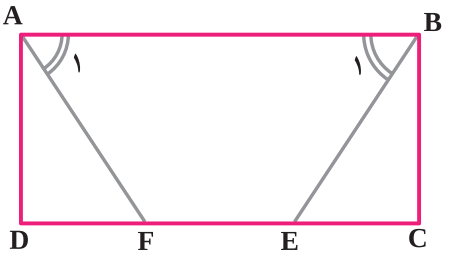
۲ــ در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماس‌اند، نشان دهید که AD و BC برابرند.



۳ــ در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی‌الساقین است و M و N روی قاعدهٔ BC طوری قرار دارند که BM=NC.

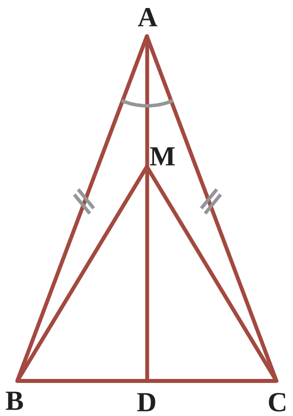
نشان دهید مثلث AMN هم متساوی‌الساقین است.

۴ــ در مستطیل ABCD، پاره‌خط‌های BE و AF طوری رسم شده که دو زاویهٔ A_1 و B_1 برابرند. ثابت کنید BE و AF مساوی‌اند.



۵ــ نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین، فاصلهٔ هر نقطهٔ دلخواه روی نیمساز زاویهٔ رأس از دو سر قاعده، برابر است :

.MB=MC



درس پنجم: شکل‌های متشابه

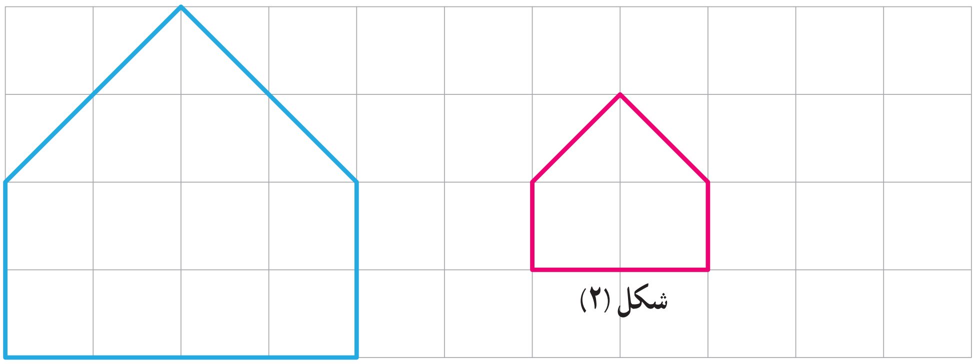
ــ در تصویرهای زیر، دو گل شبیه هم را می‌بینید. آیا هر دو گل به‌طور کامل مثل هم‌اند؟

ــ در تصویرهای زیر دو عکس از یک کودک را می‌بینید. تفاوت این دو تصویر در چیست؟

ــ تصویرهای زیر، عکس‌هایی از میدان آزادی تهران است. کدام‌یک به برج آزادی شبیه‌تر است؟

فعالیت

۱ــ مربع‌های صفحهٔ شطرنجی زیر به ضلع یک سانتی‌متر است :



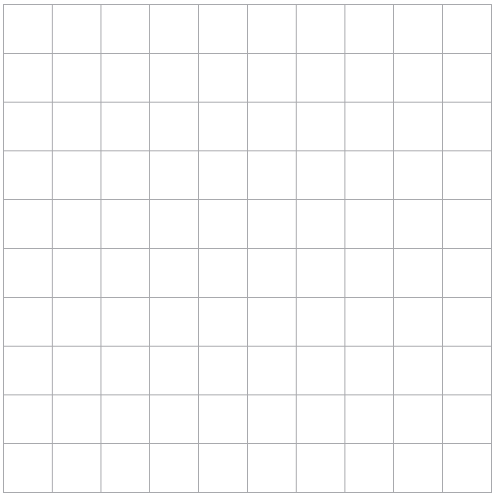
شکل (۱)

اندازهٔ ضلع‌ها و زاویه‌های هر دو شکل را بنویسید :

چه رابطه‌ای بین ضلع‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟

چه رابطه‌ای بین زاویه‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟

اندازهٔ ضلع‌های شکل (۱) چند برابر اندازهٔ ضلع‌های شکل (۲) است؟



در صفحهٔ شطرنجی مقابل یک چند ضلعی رسم کنید و چند ضلعی دیگری مانند آن بکشید؛ به‌طوری که اندازهٔ ضلع‌هایش ۲ برابر شکل اوّل باشد.

۲ــ در تصویر زیر، نقشهٔ قسمتی از شهر تهران را می‌بینید. مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰,۰۰۰ است؛ یعنی هر یک سانتی‌متر روی نقشه با ۱۰۰,۰۰۰ سانتی‌متر مقدار واقعی برابر است. فاصلهٔ دو میدان انقلاب و آزادی را پیدا کنید.

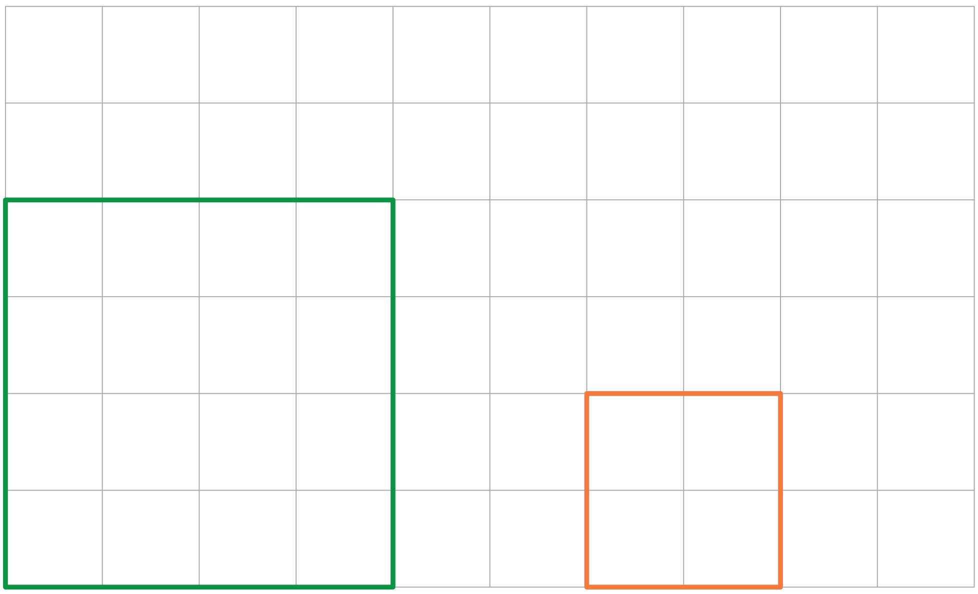
۳ــ شکل زیر را با دستگاه کپی کوچک کرده‌ایم. عدد روی دستگاه ٪۵۰ را نشان می‌داد. تصویر خروجی را شما رسم کنید.

هرگاه در دو چندضلعی همهٔ ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشد (کوچک یا بزرگ شده، یا بدون تغییر باشد) و اندازهٔ زاویه‌ها تغییر نکرده باشد، آن دو چند ضلعی با هم متشابه‌اند.

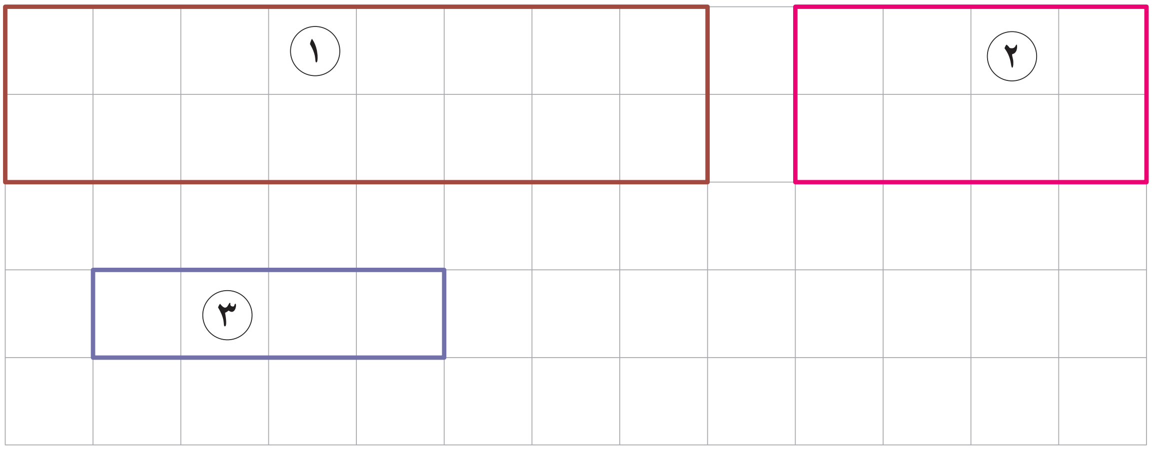
کار در کلاس

۱ــ آیا دو مربع زیر متشابه‌اند؟ اندازهٔ ضلع‌ها و زاویه‌های هر کدام را بنویسید. چه رابطه‌ای بین ضلع‌ها و زاویه‌های دو شکل وجود دارد؟

آیا می‌توان گفت هر دو مربع دلخواه با هم متشابه‌اند؟ چرا؟

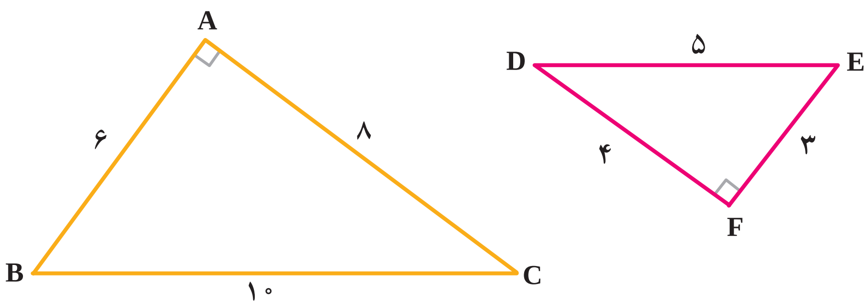


۲ــ از مستطیل‌های زیر کدام با هم متشابه‌اند؟ چرا؟
آیا هر دو مستطیل دلخواه با هم متشابه‌اند؟



فعالیت

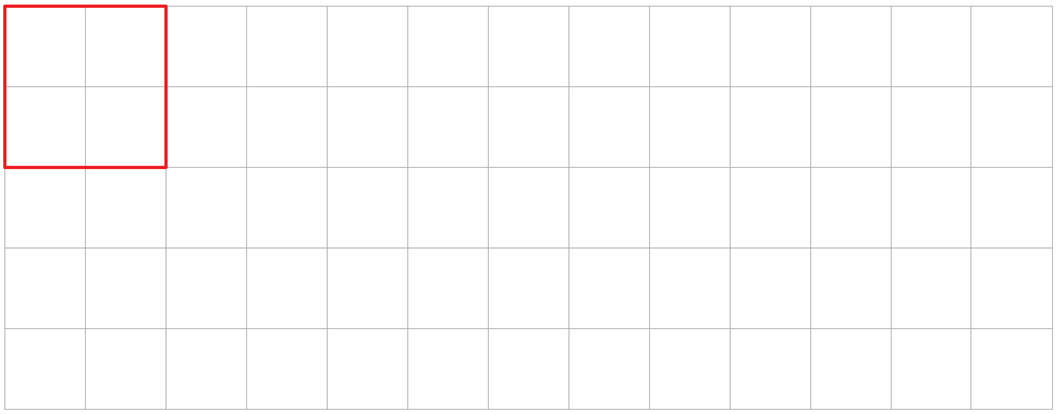
دو مثلث زیر با هم متشابه‌اند. ضلع‌های متناظر و زاویه‌های متناظر را همرنگ کنید. نسبت ضلع‌های متناظر را بنویسید. آیا سه کسر برابر به‌دست آمد؟

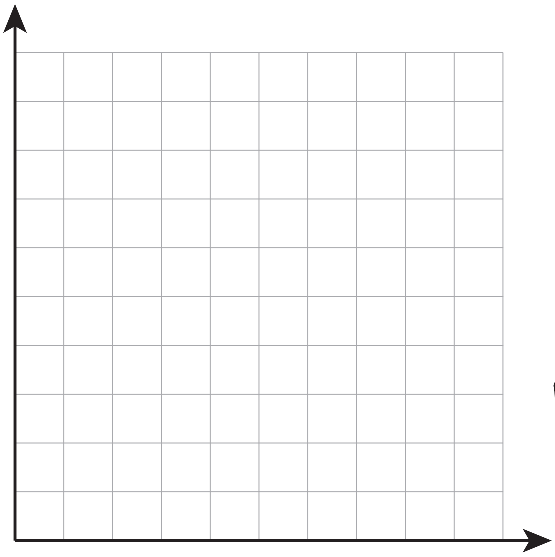


به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می‌گویند.

کار در کلاس

۱ــ با توجه به مربع صفحهٔ بعد، مربع دیگری رسم کنید؛ به‌گونه‌ای که نسبت تشابه دو مربع $\frac{۱}{۲}$ باشد. این سؤال چند پاسخ دارد؟ چرا؟





۲ــ در صفحهٔ مختصات، نقاط زیر را پیدا کنید :

مثلث ABC $C=\begin{bmatrix}۳\\۰\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$

مثلث $A'B'C'$ $C'=\begin{bmatrix}۷\\۲\end{bmatrix}$ $B'=\begin{bmatrix}۳\\۶\end{bmatrix}$ $A'=\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}$

طول ضلع‌های دو مثلث را بنویسید و تشابه آنها را بررسی کنید، در صورت متشابه بودن، نسبت تشابه را پیدا کنید.

تمرین

۱ــ آیا هر دو شکل هم‌نهشت با هم، متشابه نیز هستند؟
در صورت متشابه بودن نسبت تشابه چند است؟

۲ــ آیا هر دو لوزی متشابه‌اند؟ چرا؟

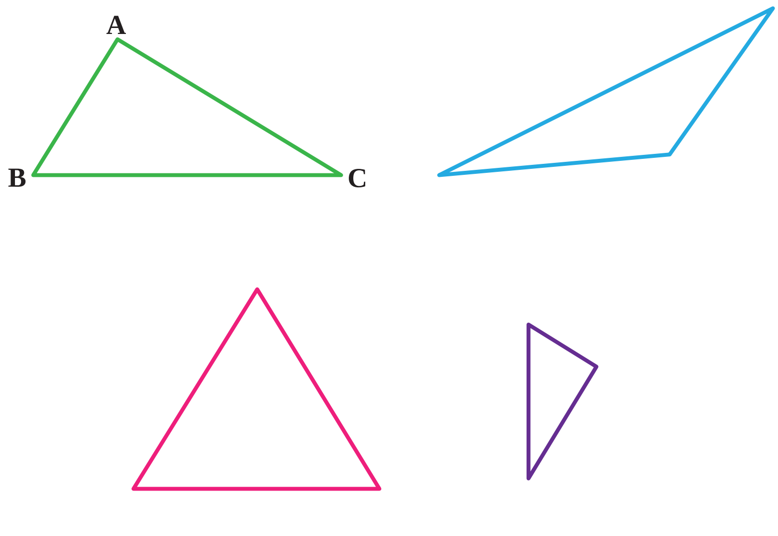
۳ــ در یک نقشه، مقیاس ۱:۲۰۰ است. فاصلهٔ دو نقطه روی نقشه ۳/۵ سانتی‌متر است. فاصلهٔ این دو نقطه در اندازهٔ واقعی چقدر است؟

۴ــ آیا هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع متشابه‌اند؟ چرا؟

۵ــ آیا هر دو مثلث متساوی‌الساقین متشابه‌اند؟ چرا؟

۶ــ مثلث ABC به ضلع‌های ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع $x-۱$ و ۱۰ و $x+۷$ با هم متشابه‌اند (اندازهٔ ضلع‌های مثلث‌ها، از کوچک به بزرگ نوشته شده است) مقدار x را پیدا کنید.

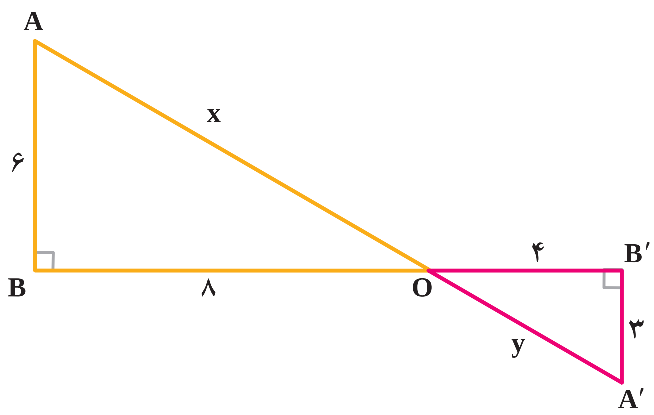
۷ــ کدام مثلث با مثلث ABC متشابه است؟



۸ــ در شکل زیر

الف) مقادیر x و y را بیابید (به کمک قضیهٔ فیثاغورس)

ب) آیا دو مثلث ABO و A'B'O متشابه‌اند؟ چرا؟



توان و ریشه

فصل ۴

وَ جَعَلنا مِنَ الماءِ کُلَّ شَیءٍ حَیّ

هر چیز زنده‌ای را از آب پدید آوردیم

(سورهٔ انبیا، آیهٔ ۳۰)

یک قطره آب شامل حدود ۳۳ میلیارد میلیارد مولکول یا به عبارت دیگر ۳۳,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ مولکول است که می‌توان آن را به صورت $3/3 \times 10^{19}$ نمایش داد. هرگونه حیاتی به آب نیاز دارد. قدر این نعمت الهی را بدانیم.

درس اوّل: توان صحیح

در سال‌های گذشته با توان‌های طبیعی یک عدد آشنا شده‌اید؛ به‌طور مثال می‌دانید :

$$\left(\frac{-۱}{۲}\right)^{۵}=\frac{-۱}{۳۲} \quad و \quad \left(\frac{۳}{۴}\right)^{۴}=\frac{۸۱}{۲۵۶} \quad و \quad (-۵)^{۲}=۲۵ \quad و \quad ۲^{۳}=۸$$

همچنین می‌دانید که اگر a عددی غیرصفر باشد، $a^{۰}=۱$.

آیا توان منفی یک عدد (ناصفر) هم معنی دارد؟ مثلاً حاصل $۲^{-۳}$ چیست؟ به کمک فعالیت زیر پاسخ این سؤال را می‌توان پیدا کرد :

فعالیت

جدول زیر را درنظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید :

۱۶	۸	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲^{۲}}=\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲^{۳}}=\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{}=\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{}=\frac{۱}{۳۲}$
	$۲^{۳}$	$۲^{۲}$	$۲^{۱}$	$۲^{۰}$	$۲^{\bigcirc}$	$۲^{\bigcirc}$	$۲^{\bigcirc}$	$۲^{\bigcirc}$	$۲^{\bigcirc}$

الف) عددهای سطر اوّل جدول با هم چه ارتباطی دارند؟

ب) هر یک از عددهای سطر دوم چه رابطه‌ای با عدد بالای آن دارد؟

ج) توان‌های عددهای سطر دوم تا $۲^{۰}$ با یکدیگر چه رابطه‌ای دارد؟

د) این الگو را ادامه دهید و در جاهای خالی عددهای مناسب بنویسید.

هـ) به کمک جدول، تساوی‌های زیر را کامل کنید :

$۲^{-۵}=$ $\qquad$ $۲^{-۴}=$ $\qquad$ $۲^{-۳}=$

به‌طور کلی اگر a یک عدد غیرصفر باشد و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه :

$$a^{-n}=\frac{۱}{a^{n}} \qquad a\neq ۰ \quad , \quad n\in\mathbb{N}$$

مثال :

الف) $۷^{-۲}=\frac{۱}{۷^{۲}}=\frac{۱}{۴۹}$

ب) $\left(\frac{۱}{۵}\right)^{-۲}=\frac{۱}{\left(\frac{۱}{۵}\right)^{۲}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲۵}}=۲۵$

ج) $\left(\frac{۲}{۳}\right)^{-۴}=\frac{۱}{\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۴}}=\frac{۱}{\frac{۱۶}{۸۱}}=\frac{۸۱}{۱۶}$

د) $(-۲)^{-۳}=\frac{۱}{(-۲)^{۳}}=-\frac{۱}{۸}$

کار در کلاس

۱ــ با توجه به مثال‌های حل شدهٔ زیر، پاسخ موارد بعدی را به‌صورت یک عدد توان‌دار با توان طبیعی بنویسید :

الف) $۵^{-۲}=\frac{۱}{۵^{۲}}=\frac{۱}{۲۵}=\left(\frac{۱}{۵}\right)^{۲}$

ب) $\left(\frac{۲}{۳}\right)^{-۲}=\frac{۱}{\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲}}=\frac{۱}{\frac{۴}{۹}}=\frac{۹}{۴}=\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۲}$

ج) $(-۶)^{-۳}=\frac{۱}{\quad}=\frac{\qquad}{\qquad}=$

د) $\left(-\frac{۲}{۷}\right)^{-۴}= \qquad = \qquad =$

به‌طور کلی اگر n یک عدد طبیعی و $a\neq ۰$ آن‌گاه : $a^{-n}=\frac{۱}{a^{n}}=\left(\frac{۱}{a}\right)^{n}$

۲ــ عبارت‌های برابر را مانند نمونه به هم وصل کنید : $(x\neq ۰\ ,\ y\neq ۰)$

$\left(\frac{۲}{۵}\right)^{-۱}$ $xy^{-۱}$ $\left(\frac{x}{y}\right)^{-۱}$ $\left(\frac{۱}{۵}\right)^{-۳}$ $(-۲)^{۲}$ $(xy)^{-۱}$ $x^{-۱}$ $۲^{-۲}$

۴ $\frac{۵}{۲}$ $\frac{x}{y}$ $\frac{۱}{xy}$ $\frac{y}{x}$ $\frac{۱}{۴}$ $۵^{۳}$ $\frac{۱}{x}$

۳ــ حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید :

الف) $\left(-\frac{۱}{۳}\right)^{-۴}=$

ب) $۲^{-۱}+۳^{-۱}+۴^{-۱}=$

ج) $-(-۵)^{۲}=$

د) $-(-۵)^{-۲}=$

هـ) $-۵^{-۲}=$

و) $۱^{-۲}=$

ز) $\frac{(-۳)^{۰}}{۳}=$

ح) $-\frac{۱}{۲^{-۲}}=$

ط) $\left(\frac{۲}{۵}\right)^{-۲}+\left(\frac{۵}{۲}\right)^{۲}=$

ی) $۲^{۰}-۲^{-۱}=$

اگر m و n دو عدد طبیعی باشند، و a یک عدد دلخواه باشد، داریم : $a^m \times a^n = a^{m+n}$

آیا این رابطه برای توان‌های منفی هم درست است؟ برای توان‌های صحیح چه رابطه‌ای داریم؟

با فعالیت بعدی می‌توان رابطه را برای عددهای صحیح هم حدس زد.

فعالیت

به حاصل‌ضرب‌های زیر توجه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$۳^{-۴} \times ۳^{۶} = \frac{۱}{۳^{۴}} \times ۳^{۶} = \frac{۳^{۶}}{۳^{۴}} = ۳^{۶-۴} = ۳^{۲}$$

$$۲^{-۵} \times ۲^{-۲} = \frac{۱}{۲^{۵}} \times \frac{۱}{۲^{۲}} = \frac{۱}{۲^{۵+۲}} = \frac{۱}{۲^{۷}} = ۲^{-۷}$$

$$\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{-۳} \times \left(-\frac{۱}{۲}\right)^{-۵} = (-۲)^{۳} \times (-۲)^{۵} = (-۲)^{۸} = \left(-\frac{۱}{۲}\right)^{-۸}$$

حاصل‌ضرب مقابل را نیز به همین روش به‌دست آورید :

$۵^{۳} \times ۵^{-۷} = ...$

در حالت کلی اگر m و n دو عدد صحیح باشند و a یک عدد دلخواه (غیرصفر)، رابطهٔ زیر برقرار است :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال :

$$۲^{۳} \times ۲^{-۵} \times ۲^{-۴} = ۲^{۳-۵-۴} = ۲^{-۶}$$

$$(۲x^{-۱}) \times (۳x^{۴}) \times (۴x^{۳}) = ۲۴x^{-۱+۴+۳} = ۲۴x^{۶} \quad (x \neq ۰)$$

کار در کلاس

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید : $(b, x, y \neq ۰)$

$(-۴)^{-۹} \times (-۴)^{-۱} =$

$۵^{-۷} \times ۵^{۱۰} =$

$(\sqrt{۲})^{۴} \times (\sqrt{۲})^{-۲} =$

$\left(\frac{-۳}{۸}\right)^{۴} \times \left(\frac{-۳}{۸}\right)^{-۹} =$

$\left(\frac{x}{y}\right)^{-۷} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{۱۱} =$

$b^{-۲} \times b^{-۳} =$

اگر a و b دو عدد مخالف صفر و m و n دو عدد صحیح باشند، روابط زیر برقرار است :

$$\frac{a^m}{a^n}=a^m \div a^n = a^{m-n} \quad ; \quad a^{-m}=\frac{۱}{a^m} \quad ; \quad \frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m \quad ;$$

$$(a^m)^n=a^{mn} \quad ; (ab)^m=a^m.b^m \quad ; \quad a^{\circ}=۱$$

کار در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت توان‌دار بنویسید.

الف) $\frac{۷^{۳}}{۷^{۵}}=$

ب) $۲^{-۲}\times ۵^{-۲}=$

ج) $\left(\frac{-۲}{۳}\right)^{-۳}\times ۱۲^{-۳}=$

د) $\left[\left(-\frac{۲}{۵}\right)^{-۲}\right]^{-۱}=$

هـ) $\frac{۲^{۸}\times ۵^{۱۰}}{۲^{۴}\times ۵^{۶}}=۲^{۸-۴}\times ۵^{۱۰-۶}=$

و) $\frac{x^{۵}.y^{۲}.z}{x^{-۲}.y^{۷}.z^{۳}}=x^{۵-(-۲)}.y^{۲-۷}.z^{۱-۳}=$ $\qquad x,y,z\neq ۰$

تمرین

۱ــ برای هر عبارت دو پاسخ داده شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $۳^{-۲}$: $\frac{۱}{۹}$ ، -۶

ب) $۳^{-۱}$: $\frac{۱}{۳}$ ، $-\frac{۱}{۳}$

ج) $۳^{-۱}\times ۴^{-۱}$: $۱۲^{-۱}$ ، $۷^{-۱}$

د) $۳^{-۱}+۴^{-۱}$: $\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}$ ، $۷^{-۱}$

هـ) $۵^{-۲}$: $-\frac{۲}{۵}$ ، $\frac{۱}{۲۵}$

و) $(-۲)^{۳}$: $۳^{-۲}$ ، -۸

۲ــ جرم یک اتم هیدروژن حدود $۱۰^{-۲۴}$ گرم است. جرم یک وزنهٔ ۱۰۰ کیلوگرمی چند برابر جرم یک اتم هیدروژن است؟

۳ــ عددهای $۱۶^{۲}$ و $۸^{۴}$ و $۲^{۱۱}$ را با یکدیگر مقایسه کنید.

۴ــ در جاهای خالی علامت >، < یا = قرار دهید :

الف) $۳^{-۱} \bigcirc ۳^{-۲}$ ب) $۲^{۰} \bigcirc ۲^{-۵}$ ج) $(۰/۵)^{-۲} \bigcirc (۰/۶)^{-۲}$

د) $۵^{-۱} \bigcirc ۰$ هـ) $\left(\frac{-۸}{۱۵}\right)^{۰} \bigcirc ۱$ و) $-۵^{-۲} \bigcirc (-۵)^{-۲}$

۵ــ در هر یک از تساوی‌های زیر x چه عددی است؟

الف) $۵^{x} \times ۵^{-۳} = ۵^{۴}$ ب) $۵^{x} \div ۵^{-۳} = ۵^{۴}$

۶ــ کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) $a^{۴} \times a^{۵} = a^{۲۰}$ هـ) $(-۳)^{۰} + (۳^{-۱})^{-۱} = ۴$

ب) $a^{۴} \times a^{۵} = a^{۹}$ و) $۳^{-۱} \times ۴^{-۱} = ۱۲^{-۲}$

ج) $(a^{m})^{n} = (a^{n})^{m} \quad a > ۰$ ز) $۶^{-۲} = -\frac{۲}{۶}$

د) $۳^{-۲} = -۹$ ح) $۳^{-۱۰} < ۳^{-۱}$

۷ــ حاصل هر عبارت را به‌دست آورید.

الف) $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۱۰} \times ۲۷^{-۳}$ ب) $(۰/۲)^{-۴} \times ۲۵^{-۲}$

ج) $\left(\frac{۱۵}{۱۴}\right)^{-۴} \times \left(\frac{۴۵}{۲۸}\right)^{۴}$ د) $(-۵^{-۲})^{-۱}$

۸ــ عددهای داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$۲^{-۳}$ و $۵^{-۳}$ و $۲^{۳}$ و $\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{-۲}$ و $(-۷)^{۲}$ و $(-۱)^{۲۱}$ و $۱^{-۹۰}$ و $-۲^{-۴}$

۹ــ عبارت نادرست را مشخص کنید.

$\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲} > (۰/۷۵)^{۳}$ $\left(\frac{۵}{۴}\right)^{۲} < (۰/۷)^{۲}$ $(۱/۲)^{۷} < (۱/۰۲)^{۷}$ $(۰/۹۸۷)^{۱۰} < ۱۰^{۰}$

۱۰ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\dfrac{\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳} \times \left(\frac{۸}{۳}\right)^{-۳}}{-۲^{۵} \times ۲^{-۸}}$ ب) $\left[-\left(\frac{۲}{۳}\right)^{-۲}\right]^{-۱}$

فعالیت

۱ــ در جدول زیر تعدادی عدد داده شده و حاصل‌ضرب آنها در توان‌های ۱۰ یا حاصل تقسیم آنها بر توان‌های ۱۰ خواسته شده است. جاهای خالی را پر کنید و توضیح دهید که هنگام ضرب یا تقسیم، مکان ممیز چگونه تغییر می‌کند؟

عدد	ضرب در ۱۰	تقسیم بر ۱۰	ضرب در ۱۰۰	تقسیم بر ۱۰۰	ضرب در ۱۰۰۰	تقسیم بر ۱۰۰۰	ضرب در $۱۰^{۴}$	تقسیم بر $۱۰^{۴}$	ضرب در $۱۰^{۵}$	تقسیم بر $۱۰^{۵}$
۱۵										
۰/۰۲										
۹/۳										

۲ــ سرعت نور ۳۰۰،۰۰۰،۰۰۰ متر بر ثانیه است. فاصله‌ای که نور در ۱۰۰ ساعت می‌پیماید، چند متر است؟ راه‌حل این مسئله در ادامه داده شده است. آن را کامل کرده، توضیح دهید که پاسخ چگونه به‌دست آمده است.

فاصله‌ای که نور در ۱۰۰ ساعت می‌پیماید = ۳۶۰۰۰۰۰×۳۰۰۰۰۰۰۰۰

ثانیه ۳۶۰۰ = ۱ ساعت

ثانیه ۳۶۰۰۰۰ = ۱۰۰ ساعت

واضح است که ضرب دو عدد بالا به این صورت دشوار است. در محاسبات ریاضی ابتدا هرکدام از این عددها را به‌صورت یک عدد اعشاری مثبت با یک رقم صحیح در توانی از عدد ۱۰ نمایش می‌دهند که آن‌را «نماد علمی» آن عدد می‌گویند؛ بنابراین:

$$۳۰۰۰۰۰۰۰۰ = ۳\times۱۰^{۸}$$

$$۳۶۰۰۰۰ = ۳/۶\times۱۰^{۵}$$

$$\Rightarrow ۳\times۱۰^{۸}\times۳/۶\times۱۰^{۵} = ۱۰/۸\times۱۰^{۱۳} = ۱/۰۸\times۱۰^{۱۴}$$

دقت کنید که حاصل‌ضرب نیز با نماد علمی نمایش داده شده است.

این‌گونه نمایش به جز سادگی در نوشتن، محاسبات را آسان‌تر می‌کند و در ضمن نوعی نظم و هماهنگی در نمایش عددهای بزرگ (یا کوچک) به شمار می‌آید.

مثال :

$۱۷۰۰۰۰۰۰۰۰=۱/۷\times ۱۰^{۹}$ $\qquad$ $۱۲۴۰۰۰=۱/۲۴\times ۱۰^{۵}$

$۹۲۰۴۰۰۰=۹/۲۰۴\times ۱۰^{۶}$ $\qquad$ $۱۳۹۳=۱/۳۹۳\times ۱۰^{۳}$

$۱۲۵/۳۹=۱/۲۵۳۹\times ۱۰^{۲}$

قطر متوسط یک یاخته (سلول) گویچه[1] (گلبول) قرمز ۰/۰۰۰۰۰۷ میلی‌متر است. همانند عددهای بزرگ، عددهای کوچک مانند ۰/۰۰۰۰۰۷ را هم می‌توان به صورت نماد علمی نمایش داد؛ یعنی :

$۰/۰۰۰۰۰۷=۷\times ۱۰^{-۶}$

ضخامت یک برگهٔ کاغذ حدود ۰/۰۰۱۶ سانتی‌متر است که با نماد علمی، آن را به‌صورت $۱/۶\times ۱۰^{-۳}$ نمایش می‌دهیم.

به‌طورکلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به‌صورت $a\times ۱۰^{n}$ است که در آن $۱\leq a<۱۰$ و n عددی صحیح است.

مثال :

$۱۲۳=۱/۲۳\times ۱۰^{۲}$ $\qquad$ $۰/۰۰۰۰۱۲۷۵=۱/۲۷۵\times ۱۰^{-۵}$

$۲۹۰۰۰=۲/۹\times ۱۰^{۴}$ $\qquad$ $۰/۰۱۳۷=۱/۳۷\times ۱۰^{-۲}$

کار در کلاس

۱ــ هریک از عددهای داده شده را با نماد علمی نمایش دهید :

$۱۵۰۰۰۰۰۰۰۰=$ $\qquad$ $۲۴۵۰۰۰۰=$

$۰/۰۰۰۰۶۱=$ $\qquad$ $۰/۰۰۵=$

$۰/۱۲۷۵=$ $\qquad$ $۱۴۰۴=$

۲ــ نمایش اعشاری عددهای زیر را بنویسید :

$۷/۳۰۴\times ۱۰^{-۵}=$ $\qquad$ $۵/۲\times ۱۰^{-۳}=$

$۹/۴۶۱۲\times ۱۰^{۹}=$ $\qquad$ $۲/۲۸\times ۱۰^{۸}=$

$۱/۱\times ۱۰^{۴}=$ $\qquad$ $۶/۰۲\times ۱۰^{-۲}=$

۱ــ مصوّب فرهنگستان

تمرین

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید :

ب) $\dfrac{۸^{-۱}\times ۴^{۲}}{۲^{-۴}\times \frac{۱}{۸}}$ الف) $\dfrac{۳^{-۵}\times ۱۰^{-۵}\times ۲۵}{۴^{-۵}\times ۱۵^{-۵}}$

۲ــ کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟

$۵/۹\times ۱۰^{-۱}=۰/۵۹$ $۱/۰۲\times ۱۰^{-۵}=۰/۰۰۰۰۰۱۰۲$

$۷/۰۰۴\times ۱۰^{-۲}=۰/۷۰۰۴$ $۴/۳\times ۱۰^{۳}=۴۳۰۰$

$۸/۲۵۷۰\times ۱۰^{۴}=۸۲۵۷۰$ $۶/۱۸\times ۱۰^{۷}=۶۱۸۰۰۰۰۰۰$

۳ــ شعاع خورشید تقریباً ۶۹۵۰۰۰ کیلومتر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

۴ــ اندازهٔ یک باکتری ۰/۰۰۰۰۰۰۵ متر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

۵ــ قطر خورشید حدود $۱/۴\times ۱۰^{۹}$ متر و قطر زمین حدود $۱/۳\times ۱۰^{۷}$ متر است. قطر خورشید تقریباً چند برابر قطر زمین است؟

۶ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید و به‌صورت نماد علمی نمایش دهید :

$\dfrac{۱۲/۵\times ۱۰^{-۴}}{۲۵\times ۱۰^{-۱۹}}$ $۲\times ۱۰^{-۷}\times ۴\times ۱۰^{۹}$

۷ــ فاصلهٔ مریخ از زمین $۹/۱۷\times ۱۰^{۷}$ کیلومتر و فاصلهٔ کیوان از زمین $۶/۲۸۷\times ۱۰^{۸}$ کیلومتر است. با مقایسهٔ این دو عدد مشخص کنید کدام سیاره به زمین نزدیک‌تر است؟

۸ــ در جاهای خالی حداقل ۳ عدد صحیح مختلف قرار دهید تا نامساوی درست باشد.

$۰/۰۳ > ۰/۰۰۳\times ۱۰^{\bigcirc}$ $۲/۷\times ۱۰^{\bigcirc} > ۰/۰۲$

۹ــ عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$۳/۷\times ۱۰^{-۲}$, $۵/۳۵\times ۱۰^{-۳}$, $۱/۲\times ۱۰^{۶}$, $۱/۵\times ۱۰^{-۲}$

درس سوم: ریشه‌گیری

فعالیت

۱ــ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را مانند نمونه‌ها به‌دست آورید :

$\left(-\frac{۲}{۳}\right)^۲=$ $\qquad$ $\left(\frac{۱}{۷}\right)^۲=$ $\qquad$ $(\sqrt{۵})^۲=۵$ $\qquad$ $(-۳)^۲=۹$

$(-۴)^۲=$ $\qquad$ $۴^۲=$ $\qquad$ $\left(-\frac{۱}{۷}\right)^۲=$ $\qquad$ $(-\sqrt{۵})^۲=$

مربع (توان دوم) عددهای ۳ و ۳− برابر ۹ است. اعداد ۳ و ۳− را ریشه‌های دوم عدد ۹ می‌نامند.
همان‌گونه که در سال‌های گذشته دیده‌اید، ریشه‌های دوم ۹ را با $\sqrt{۹}$ و $-\sqrt{۹}$ نمایش می‌دهند و داریم :
$-\sqrt{۹}=-۳$ و $\sqrt{۹}=۳$.

۲ــ جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید :

عدد	۳	−۳			$\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۲}{۳}$	$\sqrt{۵}$	$-\sqrt{۵}$				
مربع عدد (توان دوم)	۹		۱۶						$\frac{۱}{۴۹}$		۶	

ریشه‌های دوم عدد $\frac{۴}{۹}$ ، اعداد $\frac{۲}{۳}$ و $-\frac{۲}{۳}$ هستند. ریشه‌های دوم ۷، عددهای $\sqrt{۷}$ و $-\sqrt{۷}$ هستند. ریشهٔ دوم صفر، همان صفر است و داریم $\sqrt{۰}=۰$.

> به‌طور کلی اگر b یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt{b}$ و $-\sqrt{b}$ را ریشه‌های دوم b می‌نامند. همان‌طور که می‌دانید، عددهای منفی ریشهٔ دوم ندارند.

۳ــ جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید.

عدد	۲	−۲	۳	−۳		$\frac{۱}{۵}$	$-\frac{۱}{۲}$	۵	$-\frac{۲}{۳}$	۰
مکعب عدد (توان سوم)	۸	−۸			۶۴					

مکعب (توان سوم) عدد ۲ برابر ۸ است؛ یعنی $۸=۲^۳$. ریشهٔ سوم عدد ۸ عددی است که وقتی به‌توان ۳ برسد، برابر ۸ می‌شود؛ پس، ریشهٔ سوم عدد ۸ برابر ۲ است و می‌نویسیم $\sqrt[۳]{۸}=۲$. همچنین چون $-۸=(-۲)^۳$ ریشهٔ سوم عدد ۸− برابر ۲− است و می‌نویسیم $\sqrt[۳]{-۸}=-۲$ ؛ به‌عبارت دیگر با اینکه عددهای منفی ریشهٔ دوم ندارند، ولی ریشه سوم دارند. به کمک جدول قبل دیده می‌شود که ریشهٔ سوم عدد ۶۴ برابر .... و ریشهٔ سوم عدد $-\frac{۸}{۲۷}$ عدد .... است.

۴ــ طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید :

$\sqrt[۳]{-۲۷}=$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۱۲۵}=$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{-\frac{۱}{۸}}=$ $\qquad$ $(\sqrt[۳]{۸})^۳=$

به‌طور کلی اگر b یک عدد حقیقی باشد، **ریشهٔ سوم** آن را با $\sqrt[۳]{b}$ نمایش می‌دهیم.
هر عدد فقط یک ریشهٔ سوم دارد.

کار در کلاس

۱ــ حاصل هر عبارت را به‌دست آورید :

$\sqrt[۳]{-۱}=$ $\qquad$ $\sqrt{(-۴)^۲}=$ $\qquad$ $\sqrt{۴^۲}=$ $\qquad$ $\sqrt{۸۱}=$

$\sqrt[۳]{(-۷)^۳}=$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{-\frac{۸}{۱۰۰۰}}=$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۶^۳}=$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{\frac{۲۷}{۱۲۵}}=$

۲ــ به کمک رابطه $\sqrt{x^۲}=|x|$ ، که در فصل ۲ آموخته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید :

$\sqrt{\left(-\frac{۳}{۵}\right)^۲}=$ $\qquad$ $\sqrt{۸^۲}=$ $\qquad$ $\sqrt{(-۶)^۲}=$

$\sqrt{\left(۱-\frac{۱}{۳}\right)^۲}=$ $\qquad$ $\sqrt{(۲-۹)^۲}=$ $\qquad$ $\sqrt{(۱-\sqrt{۲})^۲}=$

۳ــ حاصل عبارت $\sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}$ را در هر یک از حالت‌های زیر به‌دست آورید؛ یکی از حالت‌ها حل شده است.

الف) x و y هر دو مثبت هستند $(x>۰\ ,\ y>۰)$. $\qquad \sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}=$

ب) x مثبت و y منفی است $(x>۰\ ,\ y<۰)$. $\qquad \sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}=|x|+|y|=x-y$

ج) x منفی و y مثبت است $(x<۰\ ,\ y>۰)$. $\qquad \sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}=$

د) x و y هر دو منفی هستند $(x<۰\ ,\ y<۰)$. $\qquad \sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}=$

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

در سال گذشته برای دو عدد مثبت a و b رابطه‌های زیر را آموختید :

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

به کمک فعالیت زیر می‌توان حدس زد که این روابط چگونه برای ریشهٔ سوم برقرار است.

فعالیت

با توجه به عددهای داده شده a و b جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید. با مقایسهٔ دو ستون آخر جدول چه حدسی می‌زنید؟

a	$\sqrt[3]{a}$	b	$\sqrt[3]{b}$	ab	$\sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}$
۸	۲	۱۲۵	۵	۱۰۰۰	۱۰	۲×۵=۱۰
۲۷		$\frac{۱}{۸}$				
−۸		۲۷				

به‌طور کلی برای هر دو عدد a و b داریم : $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}$ ، همچنین اگر $b\neq ۰$ داریم :

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

کار در کلاس

۱ــ آیا تساوی زیر برقرار است؟ توضیح دهید.

$$\sqrt[3]{۸}+\sqrt[3]{۲۷}=\sqrt[3]{۸+۲۷}$$

می‌توانید از استدلال زیر برای بیان نادرست بودن این تساوی استفاده کنید.

«سمت چپ تساوی برابر ۵ است؛ در حالی که سمت راست آن کمتر از ۴ است».

۲ـ در تساوی‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید :

$$۳\sqrt[۳]{-۲}\times ۵\sqrt[۳]{۴}=۱۵\sqrt[۳]{-۸}=\_\_\_$$

$$\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۳]{۱۶}=\sqrt[۳]{\_\_\_}=$$

$$\sqrt[۳]{۲۰}=\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۳]{\_\_\_}$$

$$\sqrt[۳]{۱۲۸}=\sqrt[۳]{۶۴}\times\sqrt[۳]{\_\_\_}=۴\sqrt[۳]{۲}$$

$$\frac{\sqrt[۳]{-۵۴}}{\sqrt[۳]{۲}}=\sqrt[۳]{\frac{-۵۴}{۲}}=\sqrt[۳]{-۲۷}=\_\_\_$$

$$\sqrt[۳]{\frac{۱۲۵}{۶۴}}=\frac{\sqrt[۳]{۱۲۵}}{\sqrt[۳]{۶۴}}=\_\_\_$$

تمرین

۱ـ ریشه‌های دوم عددهای زیر را بیابید :

$$\frac{۴۹}{۱۶}\ ,\ \frac{۱}{۸۱}\ ,۱۵\ ,۱۴۴\ ,۱۲\ ,۱۸$$

۲ـ ریشهٔ سوم عددهای زیر را به‌دست آورید :

$$۲۱۶\ ,۷^{۳}\ ,-۵\ ,\ -\frac{۱}{۲۱۶}\ ,۱۰$$

۳ـ کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟

$$\sqrt[۳]{(-۵)^{۳}}=-۵ \qquad \sqrt{(-۵)^{۲}}=|-۵|=۵ \qquad \sqrt[۳]{(-۱)^{۳}}=-۱ \qquad \sqrt{(-۱)^{۲}}=-۱$$

$$\sqrt[۳]{-۶۴}=-۴ \qquad (\sqrt{-۱})^{۲}=۱ \qquad \sqrt{۱/۴۴}=۱/۲ \qquad -\sqrt{\frac{۴۹}{۲۵۶}}=-\frac{۷}{۱۶}$$

۴ـ حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن در سطر دوم، وصل کنید :

$$\sqrt[۳]{-۲۵}\times\sqrt[۳]{۵} \qquad \sqrt[۳]{\frac{۸۱}{۳}} \qquad \sqrt[۳]{-۱}\times\sqrt{۸۱} \qquad \sqrt[۳]{۱۲۵}\times\sqrt{۳۶}$$

$$-۵ \qquad -۹ \qquad ۳۰ \qquad ۳$$

۵ــ حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای a قرار دهیم، نامساوی زیر درست باشد :

$$\sqrt[۳]{a} < \sqrt{۴}$$

۶ــ رابطه $\sqrt{(-x)^{۲}} = x$ به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید.

۷ــ اگر مساحت کل یک مکعب $۹۶a^{۲}$ باشد، حجم آن را بر حسب a به‌دست آورید.

۸ــ اگر $x > ۰$ و $y < ۰$ باشد، حاصل $\sqrt{x^{۲}} - \sqrt{y^{۲}}$ را ساده کنید و بدون قدرمطلق بنویسید.

۹ــ عبارت‌های زیر را مانند نمونه ساده کنید : $\sqrt{۹۰} = \sqrt{۲\times ۳^{۲} \times ۵} = \sqrt{۳^{۲}} \times \sqrt{۱۰} = ۳\sqrt{۱۰}$

$$\sqrt[۳]{۱۲۵^{۲}} \quad , \quad \sqrt{۲۴} \quad , \quad \sqrt{۸۰} \quad , \quad \sqrt{۱۵۰}$$

۱۰ــ آیا تساوی‌های زیر درست است؟

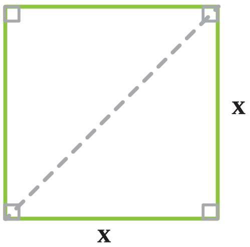
$$\sqrt[۳]{-۴} = -\sqrt[۳]{۴} \qquad\qquad (\sqrt[۳]{-۲})^{۳} = -۲$$

۱۱ــ حاصل را به‌دست آورید :

$$\frac{\sqrt[۳]{۱۸} \times \sqrt[۳]{۶۰}}{\sqrt[۳]{۵}} = \qquad \frac{\sqrt{۸} \times \sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}} = \qquad ۲\sqrt[۳]{۱۶} \times ۳\sqrt[۳]{۴} =$$

فعالیت

زمینی به شکل مربع داریم که طول قطر آن $۲\sqrt{۶}$ متر است. می‌خواهیم مساحت و محیط این زمین را به‌دست آوریم. راه حل ارائه شده را توضیح دهید و در صورت لزوم آن را کامل کنید.



حل : به کمک رابطه ـــــــــــــــ داریم : $x^۲ + x^۲ = (۲\sqrt{۶})^۲$

در نتیجه : $۲x^۲=۲۴$ و از آنجا $x^۲=۱۲$

بنابراین ـــــــــــــــ این زمین ۱۲ متر مربع است.

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که ـــــــــــــــ مربع $\sqrt{۱۲}$ متر یا $۲\sqrt{۳}$ متر است.

همچنین : متر $۲\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳} = ۴\times ۲\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳}$ = ـــــــــــــــ مربع

اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً یکسان باشد، می‌توان آنها را با هم جمع یا تفریق کرد؛ مثلاً دو عبارت $۳\sqrt{۲}$ و $۷\sqrt{۲}$ دارای قسمت‌های رادیکالی یکسان هستند و داریم : $۷\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}=۱۰\sqrt{۲}$ و $۷\sqrt{۲}-۳\sqrt{۲}=۴\sqrt{۲}$

همچنین :

$$\sqrt{۱۲}+۹\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}+۹\sqrt{۳}=۱۱\sqrt{۳}$$

اما قسمت‌های رادیکالی عبارات $۲\sqrt{۵}$ و $\sqrt[۳]{۲}$ یا عبارات $۷\sqrt{۲}$ و $\sqrt[۳]{۲}$ یکسان نیستند.

کار در کلاس

حاصل جمع هر ستون را مانند نمونه‌ها در سطر آخر بنویسید :

$\sqrt{۲}$	$\sqrt{xy}$	$۳\sqrt{a}$	$\frac{\sqrt{۵}}{۲}$	$\frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{۲}$	$۳\sqrt{۷}$
$\sqrt{۳}$	$۲\sqrt{x}$	$۲\sqrt{b}$	$۲\sqrt{۵}$	$\sqrt{۲}$	$-۴\sqrt{۵}$
$\sqrt{۵}$	$-۷\sqrt{x}$	$-\frac{۱}{۵}\sqrt{a}$	$-\frac{۲}{۳}\sqrt{۱۰}$	$۸\sqrt[۳]{۲}$	$۸\sqrt{۷}$
$۶\sqrt{۲}$	$۴\sqrt{xy}$	$-۷\sqrt{b}$	$-۲\sqrt{۱۰}$	$-۵\sqrt[۳]{۲}$	$۲\sqrt{۵}$
				$\frac{۹}{۲}\sqrt[۳]{۲}+\sqrt{۲}$	$۱۱\sqrt{۷}-۲\sqrt{۵}$

ساده کردن عبارت‌های رادیکالی

فعالیت

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.
راه حل‌ها را توضیح دهید و آنها را کامل کنید.

الف) $\sqrt{۷۲}-\sqrt{۳۲}+\sqrt{۱۸}$

ابتدا حاصل هر یک از رادیکال‌ها را به‌دست می‌آوریم :
(جاهای خالی را کامل کنید.)

$$\sqrt{۷۲}=\sqrt{۶^{۲}\times ۲}=۶\sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{۳۲}=\sqrt{۴^{۲}\times \underline{\quad}}=۴\sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{۱۸}=\sqrt{\quad}=۳\sqrt{۲}$$

بنابراین : $\sqrt{۷۲}-\sqrt{۳۲}+\sqrt{۱۸}=۶\sqrt{\quad}-\underline{\qquad}+\underline{\qquad}=۵\sqrt{۲}$

ب) $\sqrt{۵۰}+\sqrt[۳]{۲۴}+\sqrt[۳]{۸۱}=\sqrt{۵^{۲}\times ۲}+\sqrt[۳]{۲^{۳}\times ۳}+\sqrt[۳]{۳^{۳}\times ۳}$

$$=۵\sqrt{\quad}+۲\sqrt[۳]{\quad}+۳\sqrt[۳]{\quad}=۵\sqrt{\quad}+۵\sqrt[۳]{\quad}$$

مثال ۱ : حاصل $\sqrt{۴۸}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})$ را به دو روش به‌دست آورده‌ایم؛ آنها را با هم مقایسه کنید.

الف) $\sqrt{۴۸}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})=\sqrt{۴۸\times ۳}+\sqrt{۴۸\times ۲}=\sqrt{۴^{۲}\times ۳^{۲}}+\sqrt{۴^{۲}\times ۳\times ۲}$

$$=\sqrt{(۴\times ۳)^{۲}}+۴\sqrt{۶}=۱۲+۴\sqrt{۶}$$

ب) $\sqrt{۴۸}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})=\sqrt{۴^{۲}\times ۳}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})=۴\sqrt{۳}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})=۱۲+۴\sqrt{۶}$

مثال ۲ : حاصل $(\sqrt{۱۲}+\sqrt{۲۷}-\sqrt{۴۸})\div\sqrt{۳}$ را به‌دست آورید.

$$\sqrt{۱۲}+\sqrt{۲۷}-\sqrt{۴۸}=۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۳}-۴\sqrt{۳}=\sqrt{۳}$$

بنابراین حاصل تقسیم برابر ۱ است. (چرا؟)

کار در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.

۱) $\sqrt{۹۸}-\sqrt{۵۰}+\sqrt{۱۲۸}$

۲) $\sqrt{۲۷}-\sqrt{۱۲}-\sqrt{۷۵}+\sqrt{۴۸}$

۳) $۵\sqrt[۳]{۲}+۳\sqrt[۳]{۵۴}-۴\sqrt[۳]{۱۲۸}$

۴) $\sqrt{۴+\frac{۱}{۸۱}+\frac{۴}{۹}}$

۵) $(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})(۳\sqrt{۲}-\sqrt{۳})$

گویا کردن مخرج کسرها

گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی یا آسان‌تر کردن محاسبات، لازم است مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم؛ به‌طور مثال برای محاسبهٔ $\frac{۲۰}{\sqrt{۲}}$ باید عدد ۲۰ را بر $\sqrt{۲}$ تقسیم کنیم؛ در حالی که می‌توانیم مخرج کسر را به‌صورت زیر گویا کنیم :

$$\frac{۲۰}{\sqrt{۲}}=\frac{۲۰}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۲۰\sqrt{۲}}{۲}=۱۰\sqrt{۲}$$

فعالیت

توضیح دهید که مخرج هر یک از کسرهای زیر چگونه گویا شده است. هرجا لازم است، راه‌حل را کامل کنید.

الف) $\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}\times\frac{\quad}{\quad}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۶}$

ب) $\frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}}\times\frac{\sqrt[۳]{۵^۲}}{\sqrt[۳]{۵^۲}}=\frac{\quad}{۵}$

ج) $\frac{۴}{\sqrt{\frac{۲}{۳}}}=\frac{۴}{\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}}=\frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\times\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}$

د) $\frac{۲\sqrt[۳]{۷}}{\sqrt[۳]{۲^۲}}\times\frac{\quad}{\quad}=\frac{۲\sqrt[۳]{۱۴}}{۲}=\frac{\quad}{\quad}$

هـ) $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{x}}\times\frac{\quad}{\quad}=\frac{\sqrt{۲x}}{x}$ $(x>۰)$

و) $\frac{۵}{\sqrt[۳]{z^۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{\quad}}{\sqrt[۳]{\quad}}=\frac{\quad}{\quad}$ $(z\neq ۰)$

کار در کلاس

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{۶}{\sqrt[۳]{۲}}$ ب) $\frac{۲}{\sqrt{۳۲}}$

ج) $\frac{۱۲}{\sqrt{۶}}$ د) $\frac{۵}{\sqrt[۳]{۳x}}$

$(x\neq ۰)$

تمرین

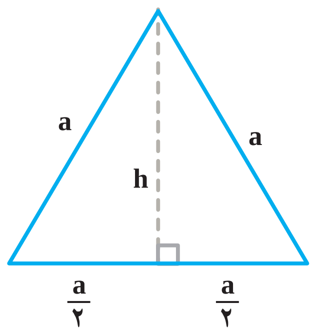
۱ــ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $۲\sqrt{۵۰}+\sqrt{۳۲}+۲\sqrt{۷۲}$ ج) $\sqrt[۳]{۲۷^۲}$ هـ) $(\sqrt{۲}-\sqrt{۵})(\sqrt{۱۰}+\sqrt{۲})$

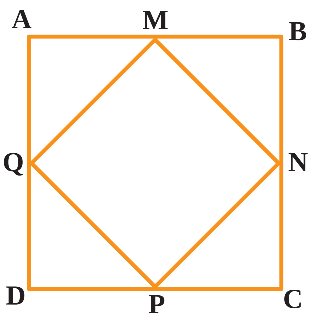
ب) $\sqrt{۸}+\sqrt{۱۲۸}-\sqrt{۵۰}$ د) $\sqrt[۳]{\frac{-۲۷}{۶۴}}$ و) $۲\sqrt{۴۸}-۳\sqrt{۲۷}$

۲ــ اگر $x<۰$ باشد، حاصل عبارت مقابل را به‌دست آورید. $۲\sqrt{x^۲}-x$

۳ــ محیط و مساحت مربعی به ضلع $۳\sqrt{۵}$ سانتی‌متر را به‌دست آورید.



۴ــ شکل مقابل یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به ضلع a نشان می‌دهد. اندازهٔ ارتفاع h را برحسب a به‌دست آورید؛ سپس مساحت آن‌را برحسب a بنویسید.



۵ــ نقاط M، N، P و Q وسط‌های اضلاع مربع ABCD هستند. اگر مساحت مربع ABCD، ۱۰۰ مترمربع باشد، محیط مربع MNPQ چقدر است؟

۶ــ در جاهای خالی علامت > یا = یا < بگذارید :

$۴ \bigcirc \sqrt{۳^۲+۲^۲}$ $\qquad$ $\sqrt{۵}+\sqrt{۴} \bigcirc \sqrt{۵+۴}$

$\sqrt{۳^۲+۴^۲} \bigcirc ۵$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{۳}{۱۱}} \bigcirc \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۱}}$

۷ــ در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید :

الف) $\sqrt{\square}=۱۰$ $\quad$ ب) $۲\sqrt{\square}=۶$ $\quad$ ج) $\sqrt{\square}=\frac{۱}{۳}$ $\quad$ د) $\sqrt[\bigcirc]{۸}=۲$

هـ) $\frac{۲^{-۵}}{۲^{\bigcirc}}=\sqrt{۶۴}$ $\quad$ و) $\frac{(\sqrt{۱۲})^۲}{۴\times ۳^۲}=۳^{\bigcirc}$ $\quad$ ز) $\frac{m^۶\times m^{-۲}}{m^{\bigcirc}}=m$ $\quad$ ح) $۹\sqrt[۳]{-۲۷}=\frac{\bigcirc^۳}{(-۴)^۳}$

۸ــ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

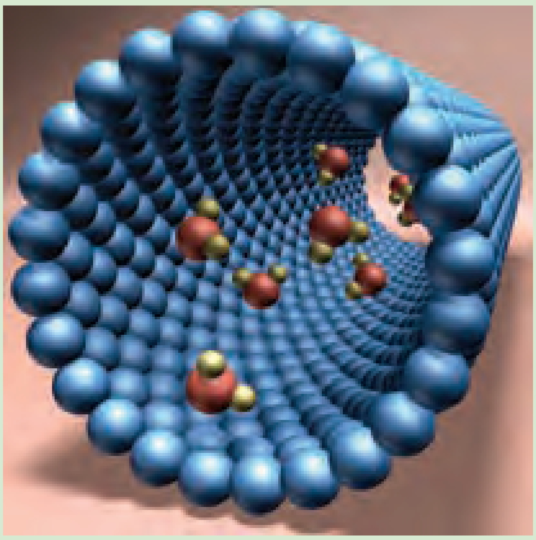
الف) $\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}$ $\qquad$ ب) $\frac{۲}{\sqrt[۳]{a^۲}}$ $\qquad$ ج) $\frac{۲}{\sqrt{۷}}$

۹ــ آیا تساوی $\sqrt{x^۲}=(\sqrt{x})^۲$ همیشه درست است؟ توضیح دهید.

الف) تساوی همیشه درست است. ب) تساوی همیشه نادرست است. ج) اگر $x\geq ۰$، تساوی درست است.

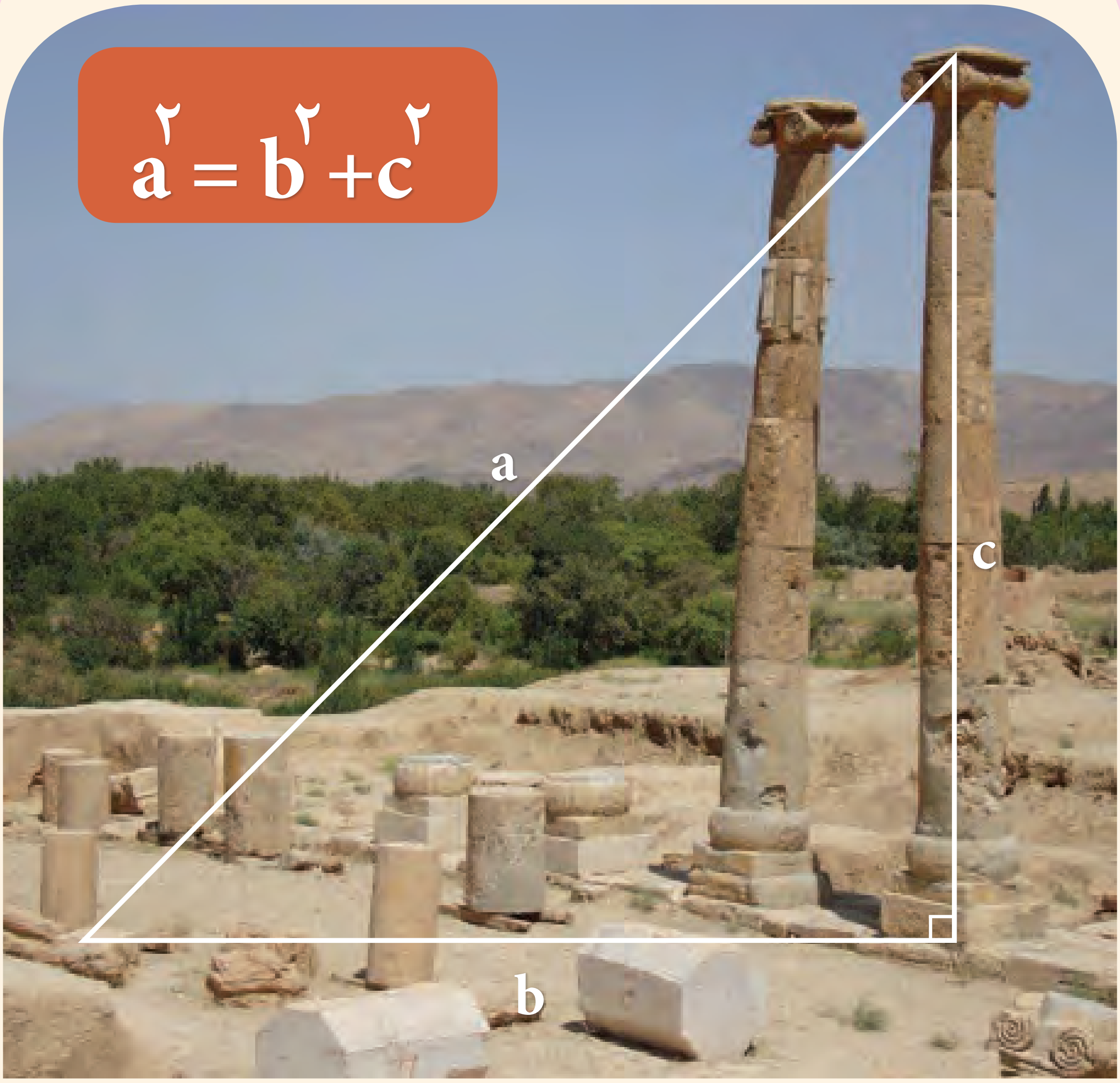
خواندنی

فنّاوری نانو مجموعه‌ای از فرایندهای تفکیک، ادغام و تشکیل مواد در حد یک اتم یا مولکول است. یک نانومتر برابر $۱۰^{-۹}$ متر؛ یعنی صدهزار برابر از قطر موی سر انسان کوچک‌تر است. کشور عزیز ما ایران بین ده کشور برتر در حوزهٔ فنّاوری نانو قرار دارد.



فصل ۵

عبارت‌های جبری



اثر باستانی «میلونها» — استان مرکزی — روستای خورهه

عبارت‌های جبری کاربردهای فراوانی دارند. به‌طور مثال رابطهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه یک تساوی بین دو عبارت جبری است که از آن در محاسبات هندسی استفاده می‌شود.

فعالیت

هر عبارت را، که به‌صورت حاصل‌ضرب یک عدد حقیقی در توان‌های صحیح و نامنفیِ یک یا چند متغیر باشد، تک جمله‌ای[1] (یک جمله‌ای) می‌نامیم.

عبارت‌های زیر همگی تک جمله‌ای هستند.

$$-\frac{۲}{۷}\,,\ ۴z\,,\ \pi x^{۲}\,,\ \frac{۱}{۵}xy\,,\ -\sqrt{۳}a^{۳}x^{۲}z\,,\ ۵x^{۱۰}\,,\ x\,,\ ۷$$

و عبارت‌های زیر تک جمله‌ای نیستند.

$$۱+x\,,\ \sqrt[۳]{y}\,,\ ۲x^{۲}+۲x\,,\ |x|\,,\ ۲\sqrt{x}\,,\ ۳^{x}\,,\ \frac{۱}{x}$$

هرگاه قسمت‌های حرفی دو یا چند تک جمله‌ای یکسان باشند، به آنها تک جمله‌ای‌های متشابه گفته می‌شود؛ به عنوان مثال تک جمله‌ای‌های $۴x^{۲}y$ و $\frac{۷}{۲}x^{۲}y$ و $-۳x^{۲}y$ متشابه‌اند، اما تک‌جمله‌ای‌های $۳x$ و $۳x^{۲}$ متشابه نیستند.

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه‌ها به‌دست آورید:

۱) $۲(-۴x\times ۷x^{۲})=۲(-۲۸x^{۳})=-۵۶x^{۳}$

۲) $(\frac{۲}{۳}x^{۲}y)^{۳}=(\frac{۲}{۳})^{۳}.(x^{۲})^{۳}.y^{۳}=\frac{۸}{۲۷}x^{۶}y^{۳}$

۳) $(-۳x^{۳})^{۲}(\frac{۱}{۳}x^{۲})^{۳}=$

۴) $(\frac{۱}{۲}a^{۲}b)(ab)(\frac{-۲}{۷}a^{۲}c^{۵})=$

۵) $۲(۵xy^{۴})^{۲}(-۲x^{۵}y^{۲})=$

۶) $(۲x^{۲}y)(۳x^{۲}y^{۳})+xy^{۳}(-۵x^{۳}y)=$

در تک جمله‌ای $۵a^{۲}x^{۳}y$، توان متغیر a برابر با ۲ است؛ بنابراین درجهٔ این تک جمله‌ای نسبت به متغیر a، برابر با ۲ است؛ به همین ترتیب درجه نسبت به x، ۳ و درجه نسبت به y، ۱ است. درجه نسبت به دو متغیر x و y را برابر با ۴=۳+۱ تعریف می‌کنیم.

۱ــ مصوّب فرهنگستان

۲ــ جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

تک جمله‌ای	متغیرها	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x و y
$\sqrt{۳}a^{۳}x^{۲}y^{۴}$	a , x , y	۲	۴	۲+۴=۶
$۵x^{۲}y^{۲}z^{۴}$				
$-۱۲x^{۳}u$				
$\frac{۳}{۵}$				

تک جمله‌ای‌های $۳x^{۲}y^{۳}$ و $-۵x^{۳}y^{۲}$ را که متشابه نیستند، تک جمله‌ای‌های غیرمتشابه می‌گوییم. چنانچه تعدادی تک جمله‌ای را با یکدیگر جمع جبری (جمع یا تفریق) کنیم، حاصل، چند جمله‌ای است. چند جمله‌ای می‌تواند تک جمله‌ای یا جمع جبری چند تک جمله‌ای غیرمتشابه باشد؛ مانند:

$$۴x^{۲}-۴x+۱ \quad , \quad x^{۲}-۲x \quad , \quad \frac{۲}{۳}ax^{۲}y-\frac{۳}{۲}axy^{۲}-axy \quad , \quad ۳x^{۴}$$

در هر چند جمله‌ای، درجهٔ نسبت به یک متغیر را برابر با بزرگ‌ترین درجه نسبت به آن متغیر تعریف می‌کنیم؛ برای مثال در چند جمله‌ای $-۲xy^{۳}+x^{۲}y-۱$، درجهٔ نسبت به x برابر با ۲ و درجهٔ نسبت به y برابر با ۳ است. همچنین درجهٔ نسبت به چند متغیر را، بزرگ‌ترین درجهٔ تک جمله‌ای‌های آن نسبت به متغیرهای موردنظر تعریف می‌کنیم. در این مثال درجهٔ نسبت به y و x برابر با ۴ است.

معمولاً در چند جمله‌ای‌ها، جملات را نسبت به توان‌های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر مرتب می‌کنند.

۳ــ چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه نسبت به متغیر x مرتب کنید:

الف) $۳x^{۲}+۵-۲x+۲x^{۳}=۲x^{۳}+۳x^{۲}-۲x+۵$

ب) $-۳bxy^{۳}+ax^{۲}y-۴bx^{۳}y^{۲}$

ج) $\frac{۱}{۲}x^{۲}y^{۲}-۲xy^{۳}+۳x^{۳}y-۴$

کار در کلاس

عبارت‌های جبری زیر را ساده و سپس آنها را نسبت به توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف) $-۵a^{۲}-۳ax+x^{۲}-(۴x^{۲}+۵ax-۳a^{۲})=$

ب) $-5a^2-3ax+x^2-[4a^2+5ax-(3a^2-8ax)]=$

ج) $(4x+5x^2)(x^3-x+1)=$

د) $(x+x^2)(x^4+x^2+1)=$

هـ) $(x^2-2x+1)(x^2+x^3-2)=$

فعالیت

۱ــ به ازای مقادیر داده شده برای x، جدول زیر را کامل کنید :

x	x^2	$6x$	x^2+6x+9	$(x+3)^2$
۰				
۵				
$\frac{3}{2}$				

مقدارهای دو ستون آخر جدول را با هم مقایسه کنید؛ نتیجه چیست؟
حاصل عبارت‌های جدول را برای چند مقدار دیگر x ادامه دهید.
با توجه به مقادیر به‌دست آمده در دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟
حاصل عبارت جبری $(x+3)^2$ را به‌دست آورید و آن را با عبارت جبری x^2+6x+9 مقایسه کنید.

$(x+3)^2=(x+3)(x+3)=$ ______

اگر دو عبارت جبری به‌گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل یکسانی داشته باشند، برابری جبری حاصل از آنها را اتحاد جبری می‌نامیم.

بنابراین برابری $(x+3)^2=x^2+6x+9$ یک اتحاد است.
برابری $x+1=3x-3$ را درنظر بگیرید. مقدار دو طرف تساوی را به ازای $x=2$، به‌دست آورید.
آیا این برابری یک اتحاد است؟ برقراری این تساوی را به ازای چند مقدار دیگر برای x بررسی کنید.
همان‌طور که می‌دانید، به چنین برابری‌هایی معادله گفته می‌شود.
۲ــ حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به‌دست آورید.

الف) $(a+4)^2=(a+4)(a+4)=a^2+4a+4a+16=a^2+8a+16$

ب) $(۵x+۲)^۲ = (\quad + \quad)(\quad + \quad) = \quad + \quad + \quad + \quad = ۲۵x^۲+۲۰x+۴$

ج) $(a+b)^۲ = (\quad + \quad)(\quad + \quad) = \quad + \quad + \quad + \quad = a^۲+۲ab+b^۲$

۳ــ با دقت در برابری $(۵x+۲)^۲ = ۲۵x^۲+۲۰x+۴$، که در فعالیت ۲ به‌دست آمده است، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید :

ــ جملهٔ اول سمت راست برابری؛ یعنی $۲۵x^۲$، چه رابطه‌ای با $۵x$ دارد؟

ــ جملهٔ دوم سمت راست برابری؛ یعنی $۲۰x$، چه رابطه‌ای با ۲ و $۵x$ دارد؟

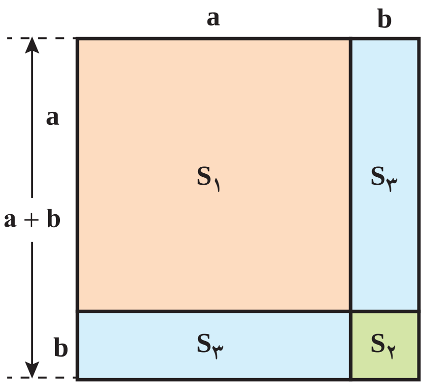
ــ جملهٔ سوم سمت راست برابری؛ یعنی ۴، چه رابطه‌ای با ۲ دارد؟

عبارت جبری $۵x+۲$ دو جمله‌ای و $(۵x+۲)^۲$ را مربع دو جمله‌ای می‌نامیم. برای سرعت بخشیدن به عملیات جبری می‌توان مربع دو جمله‌ای را به‌صورت زیر محاسبه کرد :

$$(۵x + ۲)^۲ = (۵x)^۲ + \underbrace{۲ \times ۵x \times ۲}_{\text{دو برابر حاصل‌ضرب دو جمله}} + ۲^۲$$

جملهٔ اول — جملهٔ دوم — مربع جملهٔ اول — دو برابر حاصل‌ضرب دو جمله — مربع جملهٔ دوم

برای هر دو عدد مثبت a و b، به کمک مساحت‌های مشخص شده در شکل زیر، درستی اتحاد مقابل را نشان دهید. $(a+b)^۲= a^۲+۲ab+b^۲$



مساحت کل شکل $= (a+b)^۲= S_۱+۲S_۳+S_۲$

۴ــ مانند سؤال ۲ فعالیت، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف) $(۵x-۲)^۲=(۵x-۲)(۵x-۲) =$

ب) $(۳-۵x)^۲=$

ج) $(a-b)^۲=$

ارتباط بین جملات به‌دست آمده در طرف راست تساوی‌های بالا و جملات عبارت داده شده در سمت چپ آنها را بیان کنید.

اتحاد مربع دو جمله‌ای :

برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم :

$(a+b)^{۲}= a^{۲}+۲ab+b^{۲}$

$(a-b)^{۲}= a^{۲}-۲ab+b^{۲}$

کار در کلاس

۱ـ حاصل عبارت‌های زیر را با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای به‌دست آورید.

الف) $(۲x+۱)^{۲} =$ ‏ ‏ ‏ ‏ ب) $(۴a+۳b)^{۲} =$

ج) $(x^{۲}-\frac{۱}{۲})^{۲} =$ ‏ ‏ ‏ ‏ د) $(۲xy-\frac{۱}{۲}x^{۳})^{۲} =$

هـ) $(\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳})^{۲} =$ ‏ ‏ ‏ ‏ و) $(۵-۲\sqrt{۲})^{۲} =$

۲ـ جاهای خالی را با توجه به نمونه پُر کنید.

$$(\underbrace{\ \_\ }_{\text{جملهٔ اول}}+\underbrace{۳b^{۲}}_{\text{جملهٔ دوم}})^{۲} = \underbrace{۴a^{۲}}_{\text{مربع جملهٔ اول}}+\underbrace{\ \_\ }_{\text{دو برابر حاصل‌ضرب جمله‌ها}}+\underbrace{۹b^{۴}}_{\text{مربع جملهٔ دوم}}$$

مربع جمله اول $= ۴a^{۲}=(۲a)^{۲} \Rightarrow$ جملهٔ اول $=۲a$

دو برابر حاصل‌ضرب جمله‌ها $=۲(۲a)(۳b^{۲}) = ۱۲ab^{۲}$

در نتیجه داریم : $(۲a+۳b^{۲})^{۲}=۴a^{۲}+۱۲ab^{۲}+۹b^{۴}$

الف) $(۱+b)^{۲}=$ ‏ ‏ ‏ ‏ ب) $(xy-\frac{۱}{۲})^{۲} = \_\_\_ - \_\_\_ + \frac{۱}{۴}$

ج) $(\_\_\_ - \_\_\_)^{۲} = x^{۴} - \_\_\_ + \frac{۱}{x^{۴}} \quad (x\neq ۰)$ ‏ ‏ ‏ ‏ د) $(\_\_\_ - \_\_\_)^{۲}=۳۶x^{۲}-۱۲xy+\_\_\_$

فعالیت

در سال گذشته خاصیت پخشی عمل ضرب نسبت به عمل جمع را در چند جمله‌ای‌ها خوانده‌اید.

$$a(b+c) \xrightarrow{\text{حاصل‌ضرب}} ab+ac$$

اکنون اگر این برابری را مانند زیر به صورت ضرب دو عبارت بنویسیم، دو جمله‌ای ab+ac را به ضرب عبارت‌ها تجزیه کرده‌ایم :

$$ab+ac \xrightarrow{\text{تجزیه}} a(b+c)$$

(ب.م.م) بزرگ‌ترین مقسوم علیه (عامل) مشترک

چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید :

الف) $8x^2+12x=4x.2x+4x.3$

(ب.م.م)=$4x$

$=4x(2x+3)$ (با توجه به خاصیت پخشی)

ب) $6a^4-18a^3=$

ج) $7x^4-14x^3+21x^2=$

د) $5x^2y-10xy^2+15x^2y=$

کار در کلاس

اگر سه جمله‌ای $a^2+2ab+b^2$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به‌صورت $(a+b)^2$ بنویسیم، در واقع عبارت را به عامل‌های ضرب تجزیه کرده‌ایم؛ زیرا :

$$a^2+2ab+b^2 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (a+b)^2=(a+b)(a+b)$$

با توجه به نمونهٔ زیر توضیح دهید که چگونه در سه جمله‌ای داده شده، جمله‌های اتحاد را تشخیص می‌دهید تا به کمک آن عبارت تجزیه شود.

الف) $x^2+6x+9=(x+3)^2=(x+3)(x+3)$

مربع کامل $2(x)(3)$ مربع کامل

ب) $x^2-4x+4=(\quad-\quad)^2=$ ______

ج) $n^4-10n^2+25=(\quad-\quad)^2=$ ______

د) $8ax^2+24axy+18ay^2=2a(4x^2+12xy+9y^2)=2a(\quad+\quad)^2=$ ______

(ب.م.م)=$2a$

تمرین

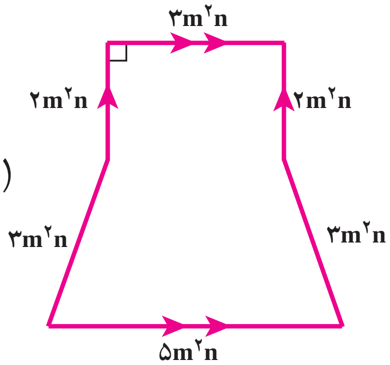
۱ــ عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(-5m)^2(-2m)^3-(\frac{1}{2}m)^2(-2m)^3$ ب) $7a^3-4b^3+5c^3-(a^3-9b^3-11c^3)$

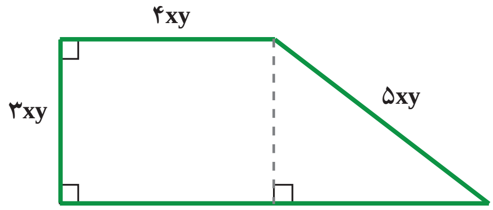
ج) $(x^m-1)(x^m-1)$ د) $x-[(y-x)-(y-1)]$

۲ــ محیط و مساحت هر شکل را بیابید.

الف)



ب)



۳ــ طرف دیگر عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(5y-3x)^2=$ ب) $(-3a^2-a)^2=$

ج) $(8x-\frac{1}{3})^2=$ د) $(2/7)^2+2(2/7)(3/3)+(3/3)^2=$

۴ــ به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$ ب) $a^2+\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})^2-2 \quad (a\neq 0)$

۵ــ عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

الف) $2x^3+8x^2+8x$ ب) $3a^3b-12ab^3+a^3b^3$

ج) $a(x+1)+b(x+1)^2$ د) a^3-2a^2+a

هـ) $x^2y^2-4xy+4$ و) $25x^4+30x^3+9x^2$

۶ــ با تبدیل b به $-b$ در اتحاد $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$، طرف دوم تساوی زیر را کامل کنید.

$\underbrace{(a+(-b))^2}_{(a-b)^2}=$

فعالیت

۱ــ حاصل عبارت زیر را با دو روش ارائه شده انجام دهید و آنها را کامل کنید.

روش اول : $(a+b+c)^۲= (a+b+c)(a+b+c) =$

روش دوم : $((a+b)+c)^۲= (a+b)^۲+۲(a+b)c +\ldots\ldots$

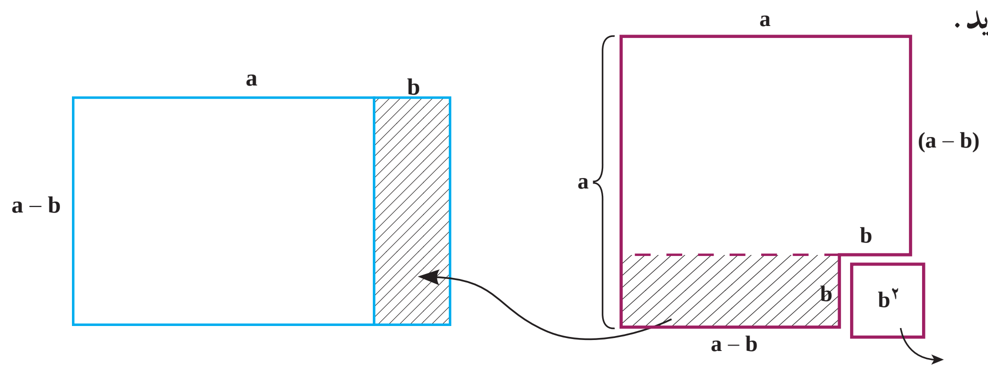
به کمک نتیجهٔ این فعالیت، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$(a+b-c)^۲=$

۲ــ با استفاده از ضرب عبارت‌های جبری، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$(a+b)(a-b)=$

اگر a و b مثبت و $b<a$ باشد، به کمک شکل‌های زیر درستی اتحاد $(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$ را نتیجه بگیرید.



$s_۱=a^۲-b^۲$ $\qquad$ $s_۲= (a-b)(a+b)$

از آنجا که $s_۱=s_۲$، بنابراین داریم :

اتحاد مزدوج $\qquad (a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$

این اتحاد را به‌صورت کلامی بیان کنید.

کار در کلاس

۱ــ تساوی‌های زیر را با استفاده از اتحاد مناسب کامل کنید.

۱) $(۱+a)(۱-a)=۱-$ ______

۲) $(۲a+۵)(۲a-۵)=$ ______ -۲۵

۳) $(t+$ ______ $)(t-$ ______ $)=t^۲-۹$

۴) $(a-b-c)^۲=a^۲+b^۲+$ ______

۲ـ حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از اتحاد مزدوج به‌دست آورید.

۱) $(۱۰-x)(x+۱۰)=(۱۰-x)(۱۰+x)=۱۰۰-x^۲$

۲) $(-y-۲z)(-۲z+y)=(\_\_\_\_-y)(-۲z+y)=۴z^۲-\_\_\_\_$

۳) $(-۷y+t)(t+۷y)=$

۴) $(-۴y-۲z)(۲z-۴y)=$

۵) $(x-۲y+۵)(x+۲y-۵)=[x-(۲y-۵)][x+(۲y-۵)]=$

فعالیت

از اتحاد مزدوج در تجزیهٔ عبارت‌های جبری نیز استفاده می‌شود.

$A^۲-B^۲=(A+B)(A-B)$

با توجه به این تساوی، جای خالی را پر کنید.

۱) $x^۲-۹=(x+۳)(\quad-\quad)$

۲) $۴y^۲-\frac{۱}{۴}z^۴=(\quad+\quad)(\quad-\quad)$

۳) $(۲x+۱)^۲-y^۲=[(۲x+۱)-\_\_\_\_][(\qquad)+y]$

۴) $۱-(۳a+z)^۲=[۱-(\qquad)][۱+(\qquad)]$

$=(\qquad)(۱+۳a+z)$

۵) $(۲x+۱)^۲-(۳x+۴)^۲=[(\qquad)-(\qquad)][(\qquad)+(\qquad)]$

$=(-x-۳)(\quad+\quad)$

۶) $x^۴-y^۴=(x^۲+y^۲)(\quad-\quad)$

$=(x^۲+y^۲)(x+y)(\quad-\quad)$

کار در کلاس

۱ـ محسن قصد دارد عبارت جبری زیر را تجزیه کند.

$۴x^۲-(۷-۳y)^۲$

محسن با توجه به شکل عبارت جبری به فکر استفاده از اتحاد مزدوج می‌افتد و این عبارت را به کمک این اتحاد به‌صورت زیر تجزیه می‌کند.

$(۲x-۷+۳y)(۲x+۷-۳y)$

به‌نظر شما، محسن در استفاده از اتحاد مزدوج، A و B را چگونه انتخاب کرده است؟

۲ــ استفاده از اتحادها، می‌تواند بعضی از محاسبات به‌ظاهر مشکل را ساده کند. به کمک اتحادها، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$۹۸\times۱۰۲=(۱۰۰-۲)\times(۱۰۰+۲)=$ ______ $=$

$۴۹۷\times۵۰۳=$ ______ $\times$ ______ $=$

$(۱۰۰۱)^۲=(۱۰۰۰+۱)^۲=$ ______

فعالیت

۱ــ به تساوی‌های زیر دقت کنید. توضیح دهید عبارت سمت راست چگونه به‌دست آمده است؟ بین جواب و عبارت سمت چپ چه ارتباطی وجود دارد؟

الف) $(x+۲)(x+۵)=x^۲+۵x+۲x+۱۰=x^۲+۷x+۱۰$

$۲+۵$ ۲×۵

ب) $(x+۹)(x-۴)=x^۲-۴x+۹x-۳۶=x^۲+۵x-۳۶$

با توجه به عبارات بالا تساوی زیر را کامل کنید.

$(x+a)(x+b)=x^۲+(\quad)x+$ ______

اتحاد به‌دست آمده را **اتحاد جملهٔ مشترک** می‌نامند.

۲ــ با توجه به فعالیت ۱ اگر طرف راست عبارت بالا را داشته باشیم و بخواهیم آن‌را به حاصل‌ضرب دو عبارت تجزیه کنیم، اعداد a و b را چگونه تشخیص دهیم؟

$x^۲+(a+b)x+ab=(x+\quad)(x+\quad)$

الف) $x^۲+۷x+۱۰=(x+\quad)(\quad+\quad)$

ب) $x^۲+۷x+۱۲=(x+\quad)(\quad+\quad)$

ج) $y^۲+y-۶=(\quad+\quad)(\quad-\quad)$

د) $y^۲-y-۶=$

هـ) $y^۲+۵y+۶=$

۳ــ تجزیهٔ عبارت $x^۲+۱۰x-۲۴$ را چهار نفر از دانش‌آموزان به کمک اتحاد جملهٔ مشترک به چهار صورت زیر انجام داده‌اند. کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؛ چرا؟

جواب نفر اول : $(x+۶)(x-۴)$

جواب نفر دوم : $(x+۶)(x+۴)$

جواب نفر سوم : $(x+۱۲)(x-۲)$

جواب نفر چهارم : $(x-۱۲)(x+۲)$

تمرین

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(\frac{۱}{۴}-x)(\frac{۱}{۴}+x)$

ب) $(۵x+۴)(۵x+۳)$

ج) $(z-\sqrt{۳})(z+\sqrt{۳})$

د) $(۳x+y-z)(۳x+y+z)$

هـ) $(x-۱)(x+۱)(x^۲+۱)$

و) $(x-۲)(x+۲)(x^۲+۳)$

۲ــ در قسمت‌های جای خالی، با استفاده از اتحادها، عبارت‌های مناسب بگذارید.

الف) $(xy-z)(xy+z)=\_\_\_\_ -z^۲$

ب) $(\_\_\_\_+\sqrt{۵})(\_\_\_\_-\sqrt{۵})=\frac{۱}{۴}y^۲-\_\_\_\_$

ج) $(x+a)(x-b)=x^۲+\_\_\_\_-\_\_\_\_$

د) $(x^۲+\_\_\_\_)(x^۲-۵)=x^۴+۲x^۲-\_\_\_\_$

۳ــ عبارات زیر را به کمک اتحادها، تجزیه کنید.

الف) $a^۲-۸a+۱۵$

ب) $x^۲+x+\frac{۱}{۴}$

ج) $x^۲+۱۰x+۲۴$

د) $x^۲-۲x-۸$

هـ) $۴ax^۲-a$

و) $x^۲-۱۳x+۳۶$

ز) $x^۲-۱۲x+۳۶$

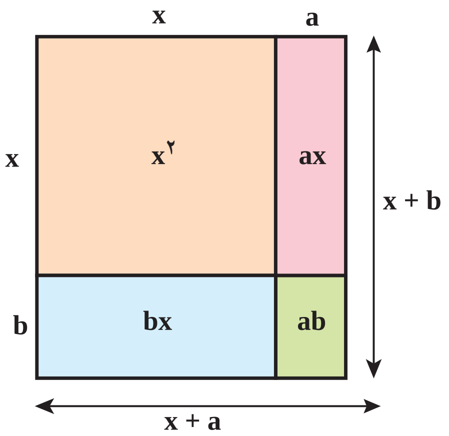
ح) $(x+y)^۲-۹$

ط) $bx^۲-۵bx-۵۰b$

ی) $x^۴-۵x^۲+۴$

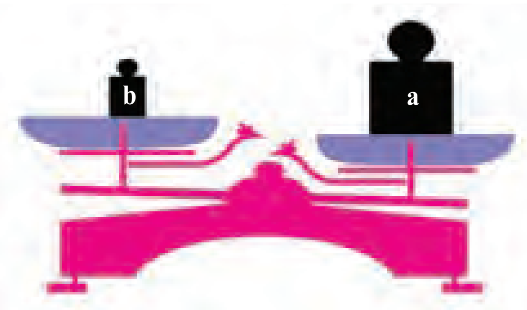
۴ــ در اتحاد جملهٔ مشترک اگر $a=b$ باشد، چه اتحادی به‌دست می‌آید؟ اگر a و b قرینه باشند، کدام اتحاد به‌دست می‌آید؟

۵ــ به کمک مساحت‌ها در شکل روبه‌رو، اتحاد جملهٔ مشترک را به‌دست آورید.



درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادله‌ها

فعالیت



روی کفه‌های ترازو دو وزنهٔ a و b کیلوگرمی قرار دارد.

با توجه به شکل، وزنهٔ a از وزنهٔ b سنگین‌تر است.

ـ با توجه به وضعیت ترازو، هر یک از نمادهای $\neq$، $<$، $>$ را در جاهای خالی فقط یک بار استفاده و وزنه‌های a و b را با هم مقایسه کنید.

$a\,\square\,b$ ، $a\,\square\,b$ ، $b\,\square\,a$

در شکل بالا اگر وزنه‌ای p کیلوگرمی باشد، به‌طوری که $a=b+p$، در این صورت برای اینکه کفه‌های ترازو مقابل هم بایستند، باید وزنهٔ p کیلوگرمی را روی کدام کفه قرار داد؟

> هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشد؛ به‌طوری‌که $a>b$، در این صورت عدد حقیقی مثبتی مانند p هست؛ به‌طوری که $a=b+p$.

با توجه به برابری‌های زیر مانند نمونه، یک نابرابری برای هر کدام بنویسید.

الف) $x=y+۴ \Rightarrow x>y$

ب) $m+۱=n+۳$

ج) $a-۲=b+۳$

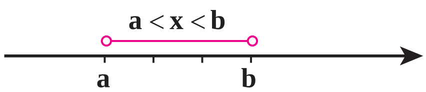
د) $۲m=۳n \qquad (m\,,n>۰)$

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، فقط یکی از حالت‌های «a بزرگ‌تر از b» یا «a کوچک‌تر از b» یا «a برابر با b» را خواهیم داشت.

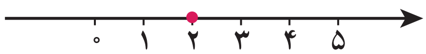
چنانچه عدد حقیقی a منفی نباشد در این صورت $a>۰$ یا $a=۰$ است. در این حالت می‌نویسیم $a\geq۰$ و می‌خوانیم a بزرگ‌تر یا برابر با ۰ است؛ مانند $۲\geq۰$ یا $۰\geq۰$ یا $\frac{۱}{۳}\geq۰$.

چنانچه a و b دو عدد حقیقی باشند، به‌طوری‌که a از b کمتر نباشد، در این صورت $a>b$ یا $a=b$ است. در این حالت می‌نویسیم $a\geq b$.

برای سه عدد حقیقی a و b و x به‌طوری که عدد دلخواه x بین اعداد a و b باشد ($a<b$)، می‌نویسیم : $a<x<b$.



مانند : $۱<۲<۵$

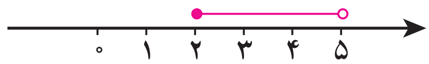


کار در کلاس

۱ــ متناظر با هر یک از ناحیه‌های مشخص شده روی محور، یک نابرابری بنویسید.

الف)

ب)



۲ــ درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر $a+b>۰$ آنگاه، a و b هر دو مثبت‌اند.

ب) اگر $ab>۰$ آنگاه، a و b هم علامت هستند.

ج) اگر $\frac{ab}{c}<۰$ آنگاه، a و b و c منفی هستند.

د) اگر $a^۲b<۰$ آنگاه، b منفی است.

۳ــ عبارت‌های کلامی را به‌صورت جبری بنویسید.

- ۳ برابر عددی منهای یک از ۷ بزرگ‌تر است.
- قرینهٔ دو برابر عددی به‌علاوه ۳ از ۸ کوچک‌تر است.

فعالیت

۱ــ به‌دو طرف نابرابری‌های زیر، عددهایی را مانند نمونه اضافه کنید. آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$-۳<۱ \xrightarrow{+۳} -۳+۳<۱+۳ \rightarrow ۰<۴$

$-۳<۱ \xrightarrow{-۷}$

$-۳<-۲ \xrightarrow{-۱۰۰}$

خاصیت ۱ : اگر دو طرف یک نابرابری را با عددی مانند c جمع کنیم، نابرابری همچنان برقرار است؛ یعنی اگر $a>b$ آنگاه $a+c>b+c$.

۲ــ دو طرف نابرابری زیر را در عددهای مختلف ضرب کنید؛ آیا نابرابری‌ها تغییر می‌کنند؟

$-۷>-۹ \xrightarrow{\times(-۳)} ۲۱<۲۷$ $\qquad$ $-۷>-۹ \xrightarrow{\times ۳} -۲۱>-۲۷$

$-۷ > -۹ \xrightarrow{\times(-۱)}$ $-۷ > -۹ \xrightarrow{\times ۰}$

خاصیت ۲ : اگر دو طرف یک نابرابری را در عدد مثبتی مانند c ضرب کنیم، نابرابری همچنان برقرار خواهد بود؛ یعنی اگر $a>b$ و $c>۰$ آنگاه $ac>bc$.

خاصیت ۳ : اگر دو طرف نابرابری $a>b$ را در عدد منفی c $(c<۰)$ ضرب کنیم، در این‌صورت داریم : $ac<bc$.

۳ــ نابرابری $۲x+۱>۷$ را درنظر بگیرید؛ این نابرابری شامل متغیر x است و درجه نسبت به x با ۱ برابر است؛ در این صورت به این نابرابری، **نامعادلهٔ یک مجهولی درجهٔ اول** می‌گوییم.

در جدول زیر مقدارهای داده شده را به‌جای x قرار دهید؛ آیا در هر حالت نابرابری برقرار است؟

نامعادله	$x=-۱$	$x=۲$	$x=۳$	$x=۴$	$x=۷$
$۲x+۱>۷$	$۲(-۱)+۱>۷$ $\downarrow$ $-۱>۷$ نادرست				

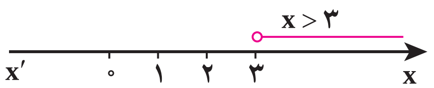
مجموعه مقادیری که به‌ازای آنها، نامعادله به نابرابری درست تبدیل شود، **مجموعهٔ جواب نامعادله** است. با توجه به جدول بالا، ۴ و ۷ در مجموعه جواب این نامعادله است. اکنون با توجه به خاصیت‌های نابرابری‌ها و پاسخ به سؤالات زیر، این نامعادله را حل کنید.

ــ دو طرف نامعادله را با ۱− جمع کنید.

ــ دو طرف نامعادلهٔ حاصل را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کنید یا دو طرف نامعادله را بر ۲ تقسیم کنید.

ــ با توجه به نابرابری $x>۳$، در می‌یابیم که مجموعهٔ همهٔ عددهای بزرگ‌تر از ۳، مجموعه جواب این نامعادله است. چنانچه مجموعه جواب نامعادله را با D نمایش دهیم، خواهیم داشت : $D=\{x\in\mathbb{R} | x>۳\}$.

می‌توان مجموعه جواب این نامعادله را روی محور عددهای حقیقی به‌صورت زیر نمایش داد.



$۲x+۱>۷ \xRightarrow{+(-۱)} \_\_\_\_\_\_ \xRightarrow{\times\frac{۱}{۲}} \_\_\_\_\_\_$

کار در کلاس

مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را مانند نمونه به‌دست آورید.

الف) $۲x+۷\geq۱۵$

ب) $\frac{x}{۳}-\frac{۱}{۲}<\frac{x-۱}{۶}\xrightarrow{\times۶}۶\times\frac{x}{۳}-۶\times\frac{۱}{۲}<۶\times\frac{x-۱}{۶}$

$\rightarrow ۲x-۳<x-۱\xrightarrow{+(-x)}۲x-۳+(-x)<x-۱+(-x)$

$\rightarrow x-۳<-۱\xrightarrow{+۳}x<۲ \qquad D=\{x\in\mathbb{R}|x<۲\}$

ج) $۳(x-۱)\geq۲x+۱$

د) $\frac{۲}{۳}(x+۷)-\frac{x}{۴}\leq\frac{۱}{۲}(۳-x)+\frac{x}{۶}$

تمرین

۱ــ در جاهای خالی نمادهای $<$ یا $>$ را جایگزین کنید.

الف) $a-b=۱$ است. در این‌صورت $a\square b$.

ج) اگر $۲(p-۱)=۲q-۳$، در این صورت $p\square q$.

ب) اگر $u-v=-۲$، در این صورت $u\square v$.

د) اگر $\frac{a-b}{۲}=-۳$ در این صورت $a\square b$.

۲ــ علامت عددهای حقیقی a, b, c را طوری تعیین کنید که نابرابری‌های زیر برقرار باشد :

الف) $\frac{ac}{b^۲}<۰$ ب) $\frac{a}{bc}>۰$ ج) $ab>۰$ د) $\frac{a^۲}{bc}>۰$

۳ــ مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $۲(x-۳)+۵<۵-x$

ج) $\frac{y-۳}{۴}-۱>\frac{y}{۲}$

ب) $۳-۲x\geq۵(۳-۲x)$

د) $-۲-\frac{q}{۴}\leq\frac{۱+q}{۳}$

۴ــ اگر $a^۲>b^۲$ آیا همواره می‌توان نتیجه گرفت، $a>b$؟

۵ــ اگر $a,b>۰$ و $a^۲>b^۲$، نشان دهید $a>b$ (از اتحاد مزدوج کمک بگیرید).

۶ــ عبارت‌های کلامی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) اگر پول علی را سه برابر کنیم، حداقل ۳۰۰۰۰ تومان از دو برابر پولش بیشتر می‌شود.

ب) مجموع نصف عدد a و چهار برابر عدد b ، حداکثر ۶ واحد است.

۷ــ دو نفر با وزن‌های ۸۵ و ۶۵ کیلوگرم به جنگلی رفتند. آنها در این جنگل به منابع غذایی دسترسی ندارند. برای همین همراه خود مواد غذایی‌ای برده‌اند که ۴۵۰۰ کیلوکالری انرژی دارد. اگر فرض کنیم هر انسان روزانه حداقل به اندازهٔ سه برابر وزن خود انرژی نیاز دارد، آنها حداکثر چند روز می‌توانند با مواد غذایی خود در جنگل دوام بیاورند؟

خواندنی

خوارزمی، ابوعبدالله، محمدبن موسی، متولّد خوارزم بوده و حدود سال ۲۳۲ هـ ق فوت کرده است. این ریاضی‌دان، منجم، جغرافی‌دان و مورخ ایرانی یکی از بزرگ‌ترین دانشمندان مسلمان و بزرگ‌ترین عالم زمان خود بود.

کتاب جبر و مقابلهٔ خوارزمی از آغاز تألیف، یعنی اوایل قرن سوم هجری برابر با قرن نهم میلادی و تا قرن شانزدهم میلادی، نزد ریاضی‌دانان به عنوان سند و حجت شناخته می‌شده است. در زیر بخشی از مقدمهٔ کتاب جبر و مقابله و ترجمهٔ آن آمده است.


بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خداوند بخشنده مهربان

خدای را سپاس بر نعمت‌هایش، بدان‌گونه که شایستهٔ اوست؛ سپاسی آن‌چنان، که اگر بر آیینی که بر بندگان ستایشگر او فرض شده انجام شود «شکر» نامیده می‌شود، و باعث افزونی نعمت می‌گردد، و ما را از دگرگونی‌های روزگار در امان می‌دارد تا به خداوندی‌اش گردن نهیم، و خویشتن را در پیشگاه عزتش ناچیز شمریم، و در برابر کبریا و عظمتش فروتن شویم.

خدایی که محمد (ص) را در روزگاری به پیامبری فرستاد که پیوند مردم با پیامبران گسسته شده، و حق ناشناخته مانده، و راه رستگاری ناپیدا گشته بود؛ پیامبری که با آمدنش کوردلان بینا شدند و گمراهان از هلاکت رهایی یافتند؛ به وجودش هر اندکی فزونی گرفت و هر پراکندگی به پیوستگی و یگانگی انجامید.

فصل ۶

خط و معادله‌های خطی

بخشی از سقف صحن و سرای حرم مطهر سیدالشهداء، امام حسین (ع)

کاربرد هندسه و خط‌ها در فرش‌بافی، کاشی‌کاری، نگارگری، خطاطی، گچ‌بری، کتیبه نویسی، تذهیب و ... غیرقابل انکار و بسیار حائز اهمیت است. از انواع خط برای ایجاد زاویه‌ها و جداسازی فضاها استفاده‌های فراوان می‌شود.

درس اوّل: معادلۀ خط

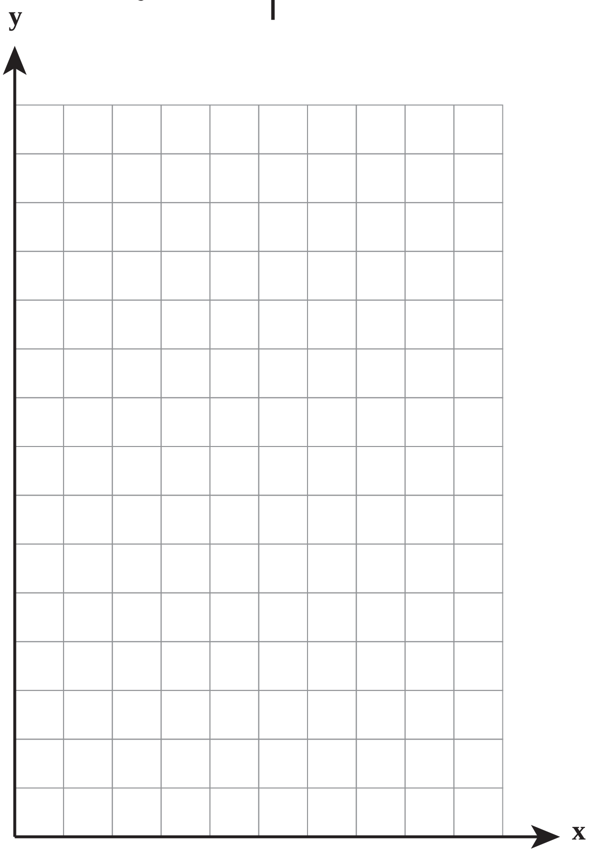
وقتی دوچرخه سواری در حال حرکت است، بین زمان و مسافتی که او طی می‌کند، رابطه‌ای وجود دارد. بین زمان سوختن شمع و کوتاه شدن آن نیز رابطه‌ای دیده می‌شود. در الگوی عددی زیر نیز بین هر جمله و شمارۀ آن رابطه‌ای هست که به‌صورت $n \rightarrow ۲n$ نمایش داده شده است:

$$\begin{array}{cccccc} ۱, & ۲, & ۳, & ۴, & \dots, & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & \dots, & ۲n \end{array}$$

فعالیت

دوچرخه سواری با سرعت ثابت دو متر در ثانیه درحال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه دو متر را طی می‌کند. جدول زیر را کامل کنید.

زمان (ثانیه) x	۰	۱	۱/۵	۲	۳	۳/۵	۴	۵
مسافت (متر) y	۰	۲						



بین زمان و مسافت طی شده چه رابطه‌ای هست؟

پس از ۱۰۰ ثانیه چه مسافتی طی شده است؟

اگر x ثانیه بگذرد، چه مسافتی طی شده است؟

زوج عددهایی را که در جدول به‌دست آوردید و به‌صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نشان دهید و نمایش هر نقطه را روی نمودار مشخص کنید؛ این نقطه‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟

اگر این نقطه‌ها را به هم وصل کنیم، چه شکلی به‌دست می‌آید؟

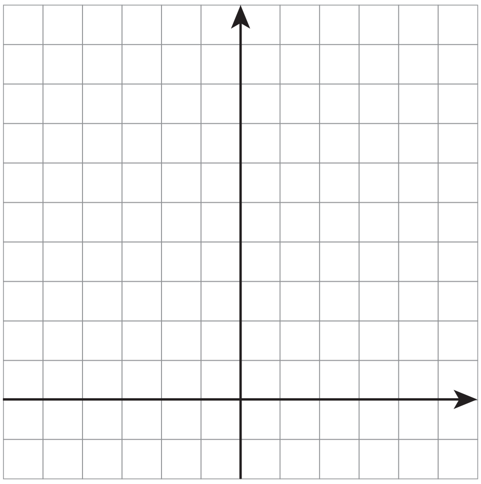
کار در کلاس

۱ــ اگر طول ضلع یک مربع را با x و محیط آن را با y نشان دهیم، چه رابطه‌ای بین x و y هست؟

ضلع (x) ←	۱	۲	۳	۴	۱۰۰	x
محیط (y) ←						

y= ______

۲ــ اگر طول ضلع یک مربع را با x و مساحت مربع را با y نشان دهیم، بین x و y چه رابطه‌ای هست؟ پس از کامل کردن جدول زیر، هر نقطه را روی نمودار پیدا کنید.



ضلع x (سانتیمتر)	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳
مساحت y (سانتیمتر مربع)	۰	۰/۲۵	۱				
نقطه‌ها	[۰ ۰]						

آیا این نقطه‌ها هم روی یک خط راست قرار گرفتند؟

فعالیت

۱ــ معادلهٔ x+y=۱۰ چند پاسخ دارد؟ پنج پاسخ آن را به‌صورت زیر بنویسید:

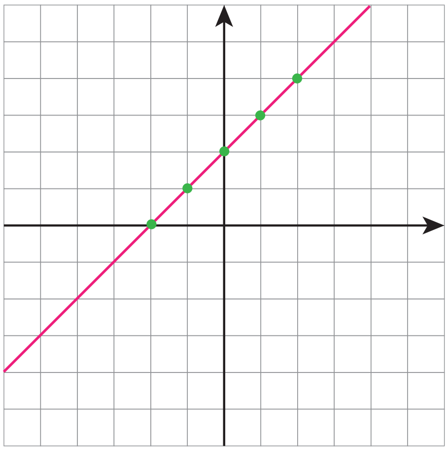
{x = ۱ ، y = }   {x = ۲ ، y = }   {x = ، y = ۳}   {x = ، y = ۴}   {x = ، y = ۰}

توضیح دهید چگونه پاسخ‌های مختلف این معادله را می‌توان پیدا کرد؟

آیا تساوی برای x=۲ و y=۵ برقرار است؟

توضیح دهید چرا این تساوی معادله است و اتحاد نیست؟

۲ــ در شکل زیر نمودار یک خط داده شده است. جدول زیر را با توجه به نمودار خط کامل کنید.



x (طول نقطه)	۰	۱	−۱	۲	−۲
y (عرض نقطه)	۲				
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۰\\۲\end{bmatrix}$				

بین طول و عرض نقطه‌ها چه رابطه‌ای هست؟ این رابطه را به‌صورت یک معادله بنویسید.

۳ــ پنج جواب برای هر یک از معادله‌های زیر بنویسید.

y=۲x−۱

$\begin{cases}x=\\y=\end{cases}$ $\begin{cases}x=\\y=\end{cases}$ $\begin{cases}x=\\y=\end{cases}$ $\begin{cases}x=\\y=\end{cases}$ $\begin{cases}x=\\y=\end{cases}$

۳x−۴y=۱۲

$\begin{cases}x=\\y=\end{cases}$ $\begin{cases}x=\\y=\end{cases}$ $\begin{cases}x=\\y=\end{cases}$ $\begin{cases}x=\\y=\end{cases}$ $\begin{cases}x=\\y=\end{cases}$

توضیح دهید که پیداکردن جواب در معادلهٔ سمت راست ساده‌تر و سریع‌تر است یا در معادله سمت چپ؟

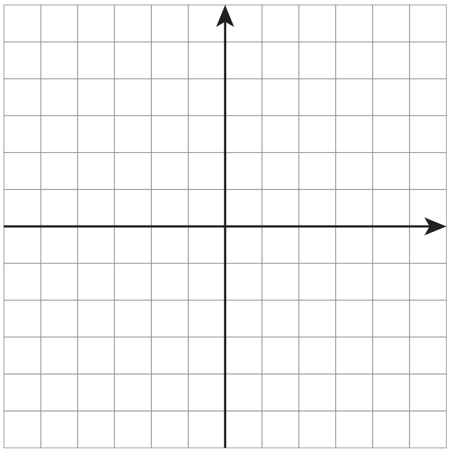
هر معادله به‌صورت کلی y=ax+b معادلهٔ یک خط است؛ زیرا درصورتی که تمام پاسخ‌های آن معادله را به‌صورت نقطه روی دستگاه مختصات نمایش دهیم، شکل یک خط به‌دست می‌آید؛ به همین دلیل می‌گوییم x و y با هم رابطهٔ خطی دارند. معادلهٔ بالا بی‌شمار جواب دارد؛ ولی اتحاد نیست.

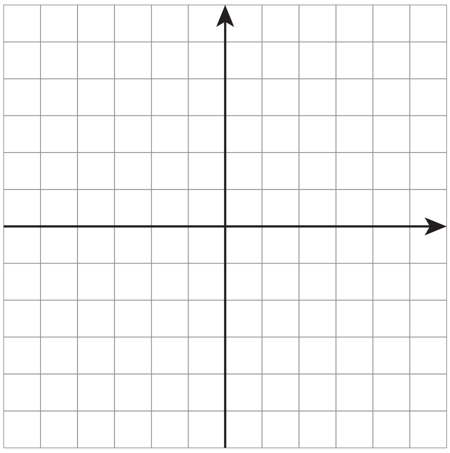
به عنوان مثال y=x+۲ معادلهٔ یک خط است که در آن a=۱ و b=۲ فرض شده است و نمودار آن را در بالا ملاحظه کردید.

کار در کلاس

۱ــ نمودار خط‌های با معادلهٔ زیر را رسم کنید.

$y=\frac{۳}{۲}x$ $\qquad$ $y=-x+۳$





۲ــ آیا خط $y=۳x$ از مبدأ مختصات (یعنی نقطه $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$) می‌گذرد؟ چرا؟

۳ــ اگر در معادله $y=ax$ به‌جای a عددهای مختلفی قرار دهیم، بی‌شمار معادلهٔ خطی مانند $y=۳x$، $y=-x$، $y=۲x$ و ... به‌دست می‌آید. آیا می‌توان گفت تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرند؟

> $y=ax$ صورت کلی معادلهٔ خط‌هایی است که از مبدأ مختصات می‌گذرند.

فعالیت

۱ــ در هر مورد دو نقطه از یک خط داده شده است؛ ابتدا خط را رسم کنید و سپس مانند نمونه با توجه به مختصات هر نقطه معادلهٔ خط را حدس بزنید.

$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ (ب $\qquad$ $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ (الف $\qquad$ $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$

$y=۲x$

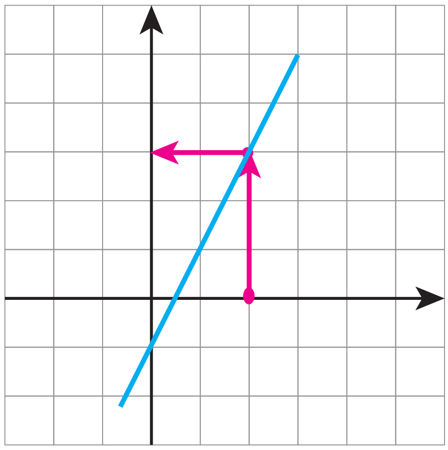
۲ــ در فعالیت ۱ برای هر مورد، مختصات دو نقطهٔ دیگر را روی هر خط به‌دست آورید.

۳ــ در قسمت (ب) کدام یک از نقطه‌ها با مختصات $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۶۰ \\ ۲۰ \end{bmatrix}$ روی خط قرار دارد؟

کار در کلاس

۱ــ مختصات نقطه‌ای به طول ۲ را روی خط y=۲x−۱ پیدا کنید.

با استفاده از نمودار خط



$\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

با استفاده از معادلهٔ خط

$y = ۲x - ۱$

$y = ۲ \times ۲ - ۱$

۲ــ مختصات نقطه‌ای به عرض ۳− را روی خط $y = -\frac{۱}{۲}x + ۲$ پیدا کنید.

۳ــ مختصات محل برخورد خط y=۵x+۱ را با محورهای مختصات پیدا کنید.

تمرین

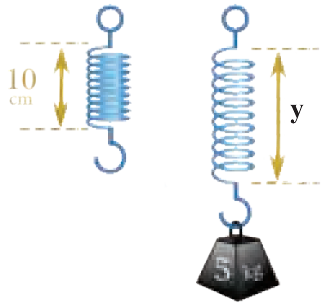
۱ــ خط به معادلهٔ $y = \frac{۱}{۲}x + ۴$ را رسم کنید.

الف) آیا نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$ روی این خط است.

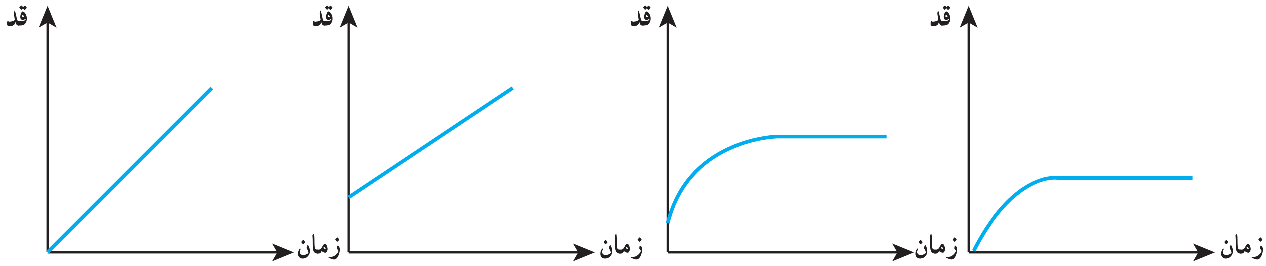
ب) مختصات نقطه‌های برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

ج) نقطه‌ای از این خط، به‌طول ۱− را پیدا کنید.

۲ــ طول یک فنر ۱۰ سانتی‌متر است. وقتی وزنه‌ای به جرم x به آن وصل شود، طول فنر از رابطهٔ $y=0/8x+10$ پیدا می‌شود. اگر وزنه‌ای به جرم ۵ کیلوگرم به آن وصل شود، طول فنر چقدر می‌شود؟



۳ــ کدام یک از نمودارهای زیر رابطهٔ رشد قد انسان را از هنگام تولد تا بزرگسالی نشان می‌دهد؟ با توجه به وضعیت‌های مختلف، نمودار آن را توصیف کنید؛ برای مثال بگویید محل برخورد نمودار با محور y به چه معناست؟



۴ــ دو نقطه از یک خط داده شده است؛ معادلهٔ خط را حدس بزنید.

الف) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

۵ــ مختصات محل برخورد خط به معادلهٔ $y=-x+2$ را با محورهای مختصات بیابید.

۶ــ مختصات نقطه‌ای از خط به معادلهٔ $y=-\frac{3}{5}x+4$ را بیابید که طول آن نقطهٔ ۵ باشد.

۷ــ خط $y=-\frac{1}{2}x+2$ را رسم کنید.

آیا نقطهٔ $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟ نقطه‌ای به طول ۱- روی این خط پیدا کنید.

نقطه‌ای به عرض ۲- روی این خط پیدا کنید.

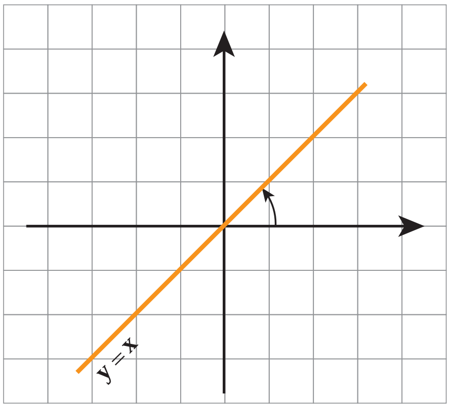
محل برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

درس دوم: شیب خط و عرض از مبدأ

فعالیت

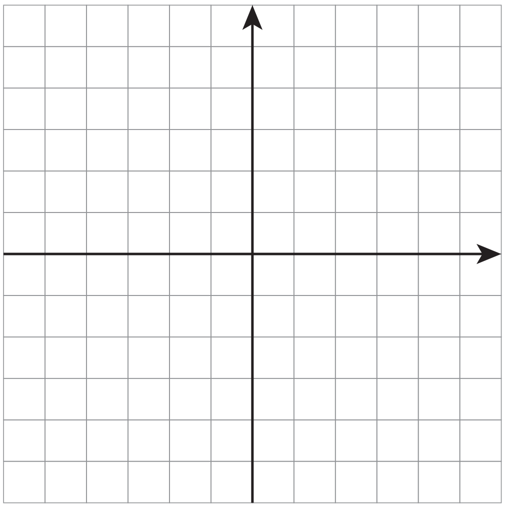
۱ــ خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه محور مختصات رسم کنید؛ هرخط را با یک رنگ بکشید.

الف) $y=\frac{۱}{۲}x$ ب) $y=x$ ج) $y=۳x$ د) $y=-x$ هـ) $y=-۲x$



تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرند؛ تفاوت آنها در چیست؟ زاویهٔ هر خط را مانند نمونه با قسمت مثبت محور طول‌ها مشخص کنید. در خط‌های الف، ب و ج چه رابطه‌ای بین ضریب x و این زاویه وجود دارد؟

خط‌های د و هـ چه نوع زاویه‌ای با جهت مثبت محور xها می‌سازد؟



۲ــ خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید؛ هر خط را با یک رنگ بکشید.

$y=۲x+۳$ ، $y=۲x$ ، $y=۲x-۱$

در معادلهٔ این خط‌ها ضریب x برابر با ۲ است که به آن شیب خط می‌گوییم. تفاوت خط‌ها در چیست؟ زاویهٔ خط‌ها را با محور xها با هم مقایسه کنید؛ چرا این خط‌ها با هم موازی‌اند؟

بین محل برخورد خط با محور عرض‌ها و عدد ثابت معادله چه رابطه‌ای می‌بینید؟

در معادلهٔ خط $y= ax+b$، عدد a، شیب خط نامیده می‌شود. با تغییر a زاویهٔ خط با جهت مثبت محور طول‌ها تغییر می‌کند. عدد b نشان‌دهندهٔ محل برخورد خط با محور عرض‌هاست؛ به همین دلیل به آن عرض از مبدأ می‌گویند.

به عنوان مثال در خط به معادلهٔ $y=-۳x+۲$، عرض از مبدأ ۲ و شیب خط، ۳- است.

کار در کلاس

۱ــ در هر یک از معادله‌های زیر، شیب و عرض از مبدأ خط را مشخص کنید.

$y=۲x-۴$ $\qquad y=-\frac{۲}{۳}x$ $\qquad y=-۳x+۱$

۲ــ معادلهٔ خطی را بنویسید که :

الف) شیب آن ۲− و عرض از مبدأ آن ۱− باشد.

ب) شیب آن $\frac{۱}{۲}$ باشد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند.

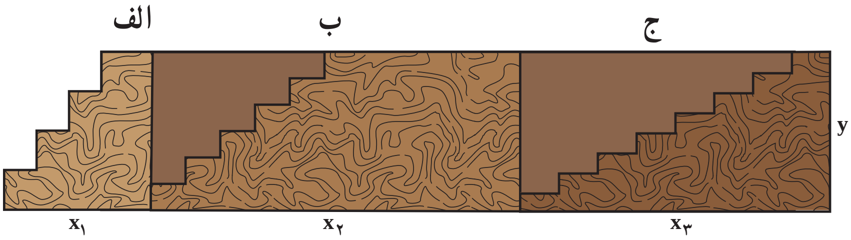
ج) با خط $y=۲x+۱$ موازی باشد و از نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix}$ بگذرد.

۳ــ معادلهٔ خطی را بنویسید که شیب آن ۲ باشد و از نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ بگذرد.

$$\underset{۲}{\overset{}{y=\underset{\downarrow}{a}x+b}} \rightarrow y=\underset{\underset{۲}{\downarrow}}{۲}x+b \rightarrow \underset{\underset{۱}{\downarrow}}{۲}=۲\times۱+b \rightarrow \boxed{b=\quad} \xrightarrow{\text{معادله خط}} \boxed{y=\quad}$$

فعالیت

۱ــ در تصویر زیر، سه نوع راه‌پله می‌بینید؛ در هر سه مورد ارتفاعی که بالا می‌روید، یکسان است.



کدام راه پله شیب بیشتری دارد؟

کدام یک، تعداد پله، بیشتری دارد؟

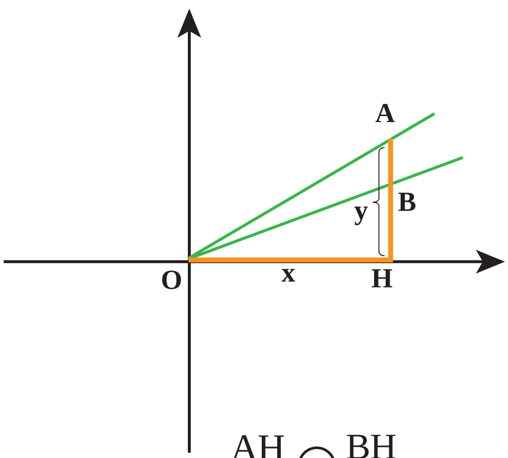
بالا رفتن از کدام یک ساده‌تر است؟

۲ــ در محورهای مختصات مقابل، کدام خط شیب بیشتری دارد؟

نقطه‌های A و B طول ثابتی دارند ولی عرض آنها متفاوت است.

کدام یک از دو نسبت زیر بزرگ‌تر است؟ چرا؟

این دو نسبت چه ارتباطی با شیب خط‌ها دارد؟



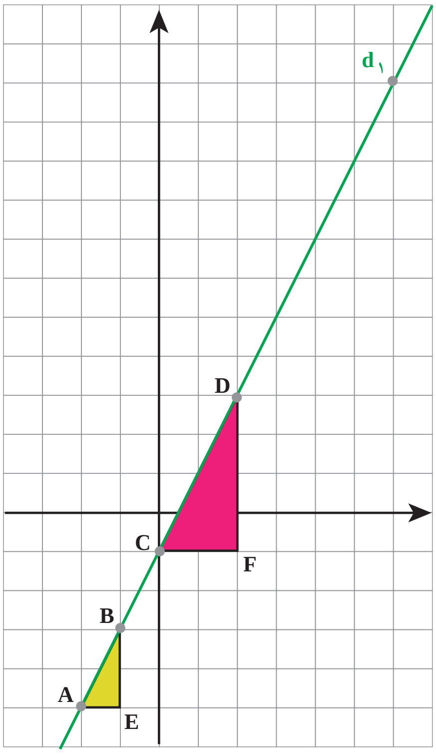
$\frac{AH}{OH} \bigcirc \frac{BH}{OH}$

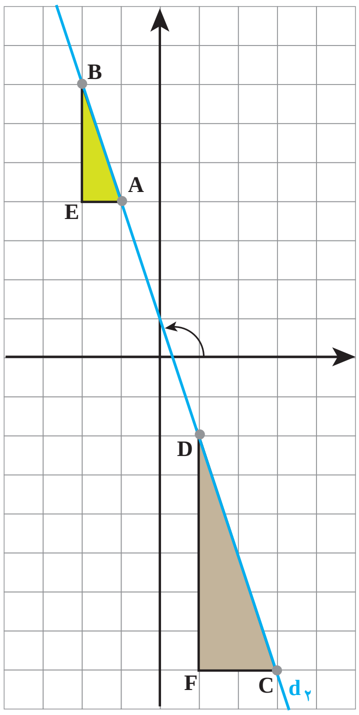
۳ــ روی خط d_1 به معادلهٔ $y=2x-1$ دو نقطهٔ دلخواه مثل A و B درنظر گرفته‌ایم. با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ ایجادشده، شیب خط را به‌دست آورده‌ایم.

$$\text{شیب خط } d_1 = \frac{EB}{EA} = \frac{2}{1} = 2$$

برای دو نقطهٔ C و D نیز با توجه به مثلث رسم شده، شیب خط را پیدا کنید.

دو نقطهٔ دلخواه دیگر روی خط درنظر بگیرید و با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه شیب خط را دوباره پیدا کنید.



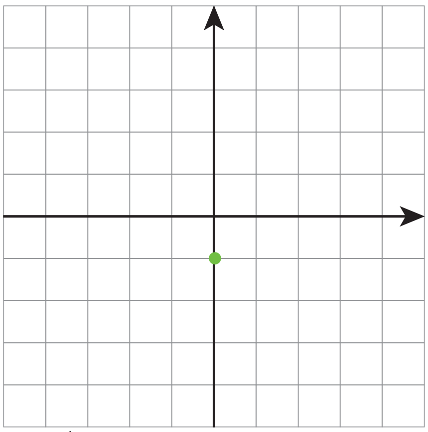


۴ــ خط d_2 با محور طول، زاویهٔ بزرگ‌تر از 90° می‌سازد؛ پس شیب خط، منفی می‌شود. با توجه به مثلث‌های رسم شده مقدار شیب خط d_2 را پیدا کنید.

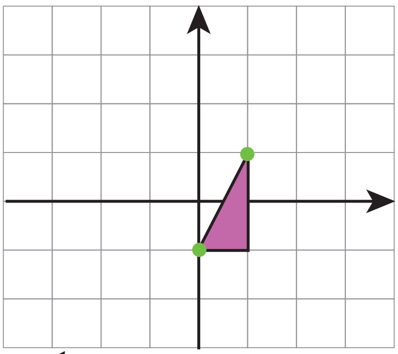
$$\text{شیب خط } d_2 = -\frac{EB}{EA} =$$

خط d_2 محور عرض‌ها را در نقطهٔ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ قطع کرده است یا عرض از مبدأ آن ۱ است. معادلهٔ خط d_2 را بنویسید.

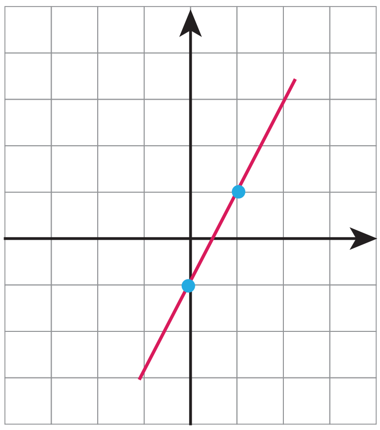
۵ــ با توجه به این بیان از شیب خط، در زیر مراحل رسم معادلهٔ خط $y=2x-1$ با روش دیگری مشخص شده است؛ این روش را توضیح دهید.



(۱) خط از این نقطه می‌گذرد.

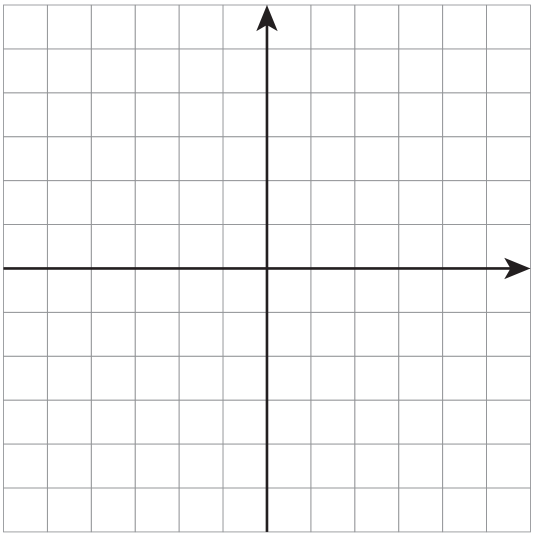


(۲) با توجه به مقدار شیب نقطهٔ دیگر پیدا می‌شود.



(۳) با داشتن دو نقطه خط رسم می‌شود.

فعالیت



۱ــ نقطه‌های $\begin{bmatrix}۲\\۰\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۲\\-۱\end{bmatrix}$ را در دستگاه مختصات نشان دهید و خطی را رسم کنید که از این دو نقطه می‌گذرد.

روی خط، دو نقطه انتخاب کنید و مختصات آنها را بنویسید. $\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$

اگر نقطهٔ دیگری روی این خط در نظر بگیریم، طول آن برابر است با :

یک نقطهٔ دلخواه به طول ۲ بنویسید و روی محور مختصات نشان دهید : $\begin{bmatrix}۲\\ \\ \end{bmatrix}$

تمام نقطه‌ها به طول ۲ روی خط بالا قرار می‌گیرند و معادلهٔ آنها به‌صورت x=۲ است.

۲ــ صورت کلی معادله‌های خطی به‌صورت ax+by=c است.

الف) با توجه به مقدارهای نوشته شده، معادلهٔ خط را بنویسید؛ کدام خط از مبدأ می‌گذرد؟

$a=۲\ ,b=۳\ ,c=۴ \rightarrow$

$a=-۱\ ,b=۲\ ,c=۰ \rightarrow$

ب) با توجه به خط‌های داده شده، مقدارهای a، b و c را پیدا کنید.

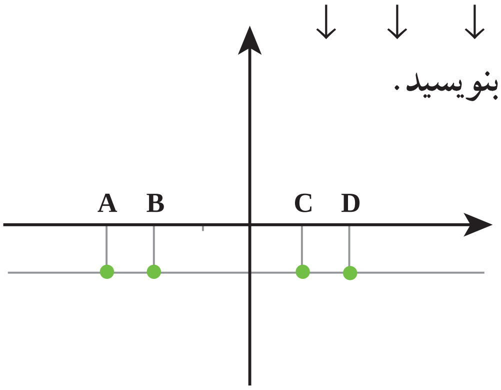
$-۳x+۲y=۲ \rightarrow \quad a= \quad b= \quad c=$

$y=۲x+۱ \rightarrow \quad a= \quad b= \quad c=$

ج) برای خط x=۲ مقدارهای a، b و c را بنویسید.

$$\underset{\downarrow}{a}x+\underset{\downarrow}{b}y=\underset{\downarrow}{c} \rightarrow x=۲$$

۳ــ مختصات نقطه‌های مشخص شده را روی خط بنویسید.



$A=\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$

این نقطه‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟

معادلهٔ خط رسم شده را بنویسید.

در شکل کلی معادله‌های خطی به‌جای a، b و c چه عددهایی قرار دهیم تا معادلهٔ خطِ رسم شده به‌دست آید؟

$$\begin{array}{ccc} ax & +\, by & = c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

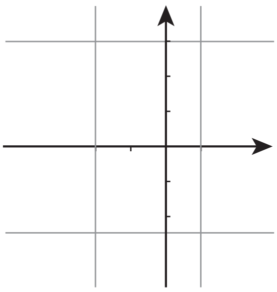
۴ــ مانند نمونه برای خط‌های داده شده شیب و عرض از مبدأ را پیدا کنید.

$$۲y-۴x=۸ \rightarrow ۲y=۴x+۸ \rightarrow y=\frac{۴}{۲}x+\frac{۸}{۲} \rightarrow y=\overset{\text{شیب}}{۲}x+\overset{\text{عرض از مبدأ}}{۴}$$

$۳x-۲y=۶$

$x+۳y-۹=۰$

کار در کلاس



۱ــ معادله‌های خط‌های رسم شده را در دستگاه مختصات مقابل کنار هر کدام بنویسید.

۲ــ از برخورد دو خط $y=-۳$ و $x=۲$ کدام نقطه به‌دست می‌آید؟

۳ــ معادله‌ای خطی بنویسید که موازی محور xها باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ بگذرد.

تمرین

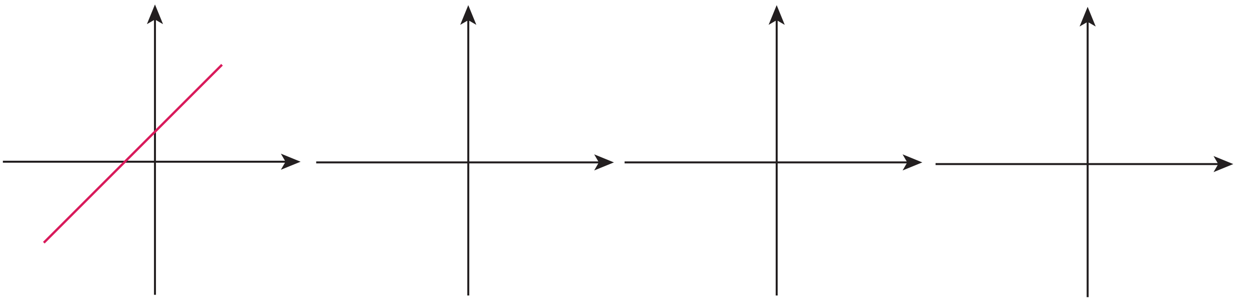
۱ــ خط‌های به معادلهٔ $y=۳$ و $x=-۲$ را رسم و مختصات محل برخورد آنها را پیدا کنید. زاویهٔ بین این دو خط چند درجه است؟

۲ــ معادلهٔ محور طول‌ها و محور عرض‌ها را بنویسید؛ محل برخورد آنها چه نقطه‌ای است؟

۳ــ شیب و عرض از مبدأ خط‌های زیر را پیدا و سپس آن خط‌ها را رسم کنید.

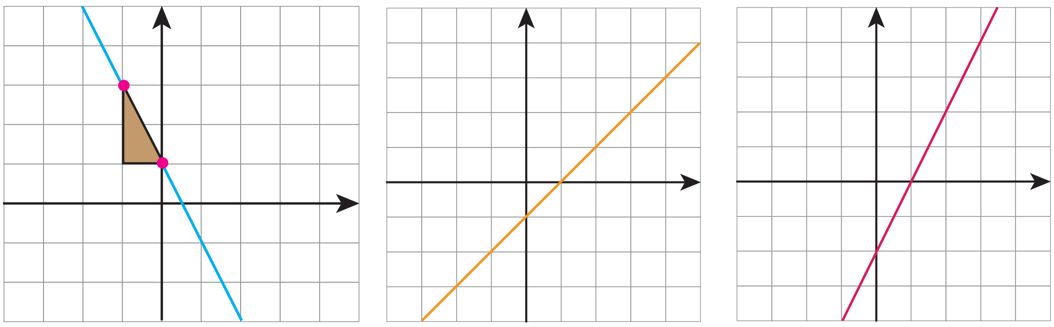
$۲x-y=۳$ $\qquad$ $۴x-۲y=۸$ $\qquad$ $۳y-۲x=۶$

۴ــ خط y=ax+b را درنظر بگیرید. در هر یک از حالت‌های مورد نظر، خط را مانند نمونه در دستگاه مختصات رسم کنید.



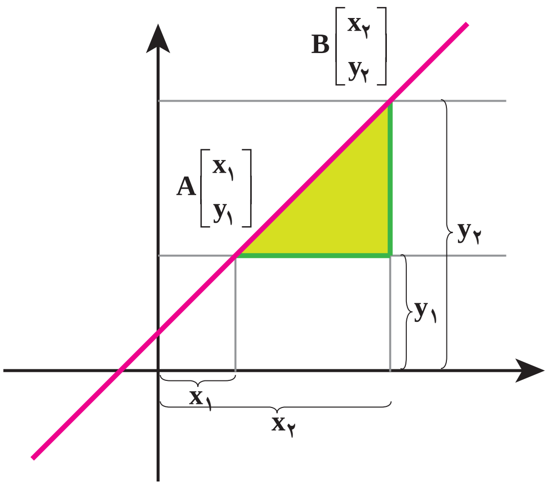
a < ۰	a < ۰	a > ۰	a > ۰
b < ۰	b > ۰	b < ۰	b > ۰

۵ــ معادلهٔ خط‌های زیر را بنویسید.



۶ــ معادله خطی بنویسید که با خط ۲y−۴x=۵ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix}$ بگذرد.

۷ــ با توجه به شکل مقابل نشان دهید.



$$\text{شیب خط} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$

۸ــ $\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۴\\-۱\end{bmatrix}$ دو نقطه از یک خط هستند؛ شیب خط را پیدا کنید و معادلهٔ خط را بنویسید.

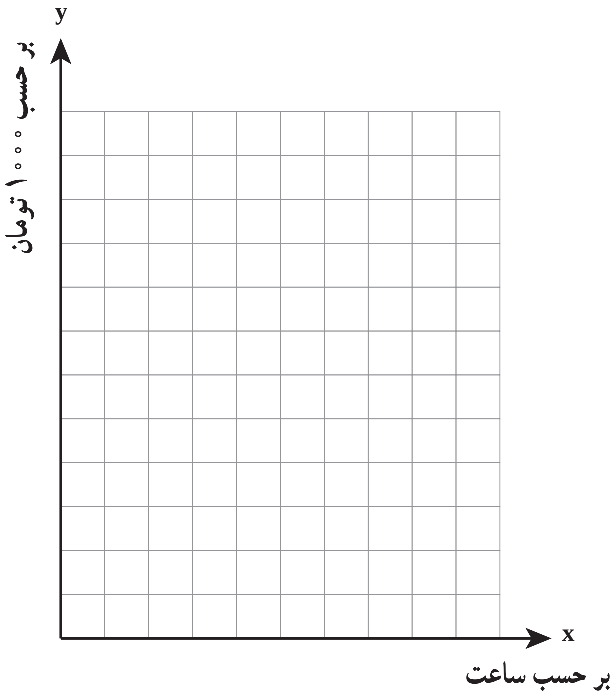
درس سوم: دستگاه معادله‌های خطی

فعالیت

۱ــ هزینهٔ اشتراک یک خط اینترنت روی تلفن همراه ۳۰۰۰۰ تومان مبلغ ثابت و ۲۰۰۰ تومان برای هر ساعت استفاده است. هزینهٔ کلّی x ساعت استفاده از اینترنت را با y نشان دهید و رابطه‌ای بین y و x بنویسید.

یک نوع دیگر از اشتراک اینترنت بدون مبلغ ثابت است؛ ولی برای هر ساعت استفاده، ۳۰۰۰ تومان هزینه دارد. رابطه‌ای بین هزینهٔ اشتراک (y) و x ساعت استفاده از اینترنت را در این حالت بنویسید.

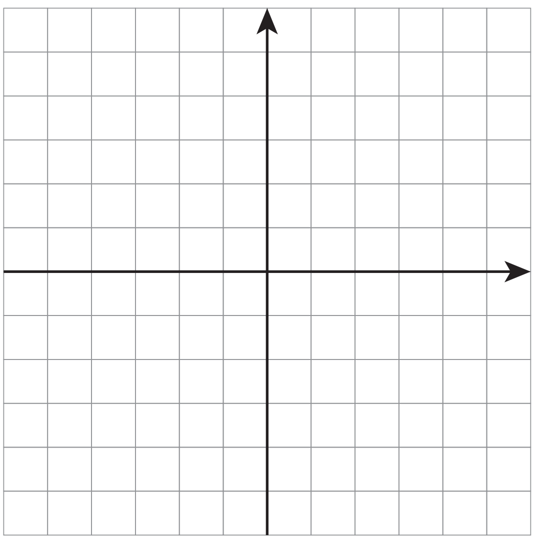
دو خط به معادله‌های فوق را در دستگاه مختصات مقابل رسم کنید. محل برخورد این دو خط چه ویژگی‌ای دارد؟ برای ۱/۵ ساعت استفاده، کدام نوع اشتراک بهتر است؟ بعد از چند ساعت استفاده از اینترنت، اشتراک نوع اول به صرفه خواهد بود؟



۲ــ معادلهٔ $y=2x-1$ چند جواب دارد؟ نمودار آن را رسم کنید.

معادلهٔ $y=-x+2$ چند جواب دارد؟

نمودار آن را رسم کنید. توضیح دهید چگونه یک جواب مشترک برای این دو معادله پیدا می‌کنید.

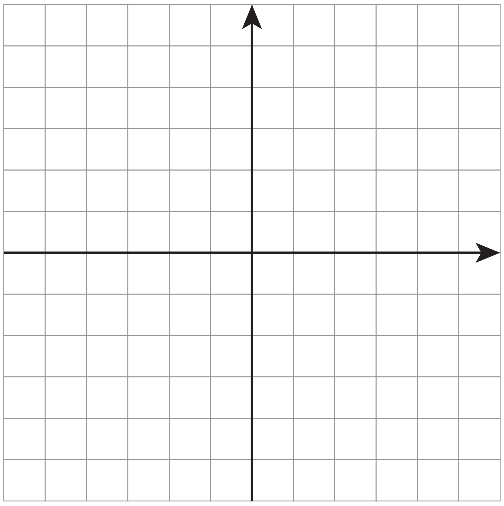


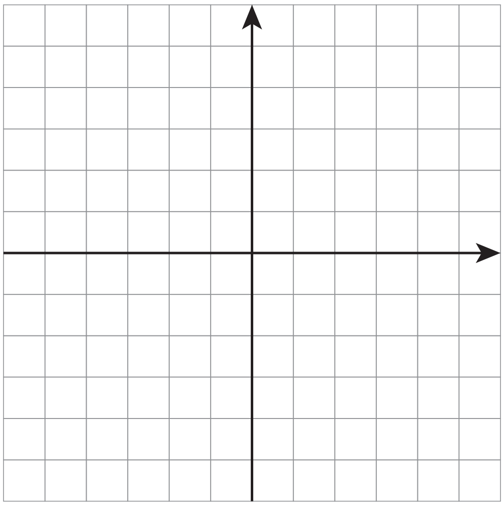
کار در کلاس

با رسم خط‌ها، دستگاه معادله‌های خطی زیر را حل کنید؛ یعنی یک جواب مشترک برای دو معادله پیدا کنید.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$





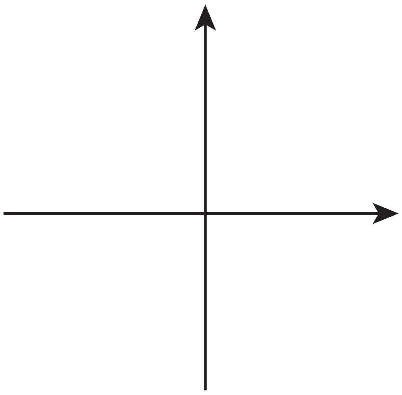
فعالیت

۱ــ خط $2x-3y=4$ را رسم کنید. خط به معادلهٔ $4x-6y=8$ را که در آن تمام عددهای معادلهٔ بالا دو برابر شده است، رسم کنید.

الف) آیا خط جدیدی به‌دست آمد؟

ب) چه نتیجه‌ای می گیرید؟ اگر تمام ضریب‌های عددی یک معادلهٔ خط را در یک عدد ضرب کنیم ____________________

ج) آیا می‌توان گفت این دستگاه معادلهٔ خطی بی‌شمار جواب دارد؟ چرا؟



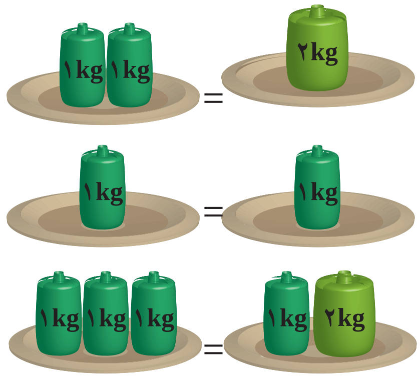
$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 8 \end{cases}$$

۲ــ به مثال‌های زیر توجه کنید :

الف)
$$\begin{array}{r} ۲=۲ \\ +\ ۵=۵ \\ \hline ۷=۷ \end{array}$$

ب)
$$\begin{array}{r} \mathrm{x}\ =\ \mathrm{x} \\ +\ ۲\mathrm{x}=۲\mathrm{x} \\ \hline ۳\mathrm{x}=۳\mathrm{x} \end{array}$$

ج)



از این مثال چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ *اگر دو طرف دو تساوی را با هم جمع کنیم،* ______________

۳ــ با توجه به نتیجه‌هایی که از سؤال‌های بالا گرفتید، توضیح دهید که چگونه دستگاه معادله‌های زیر حل شده است. در هر قسمت مشخص کنید از کدام نتیجه استفاده شده است.

الف)
$$\begin{array}{r} \begin{cases} \mathrm{x}-\mathrm{y}=۱ \\ \mathrm{x}+\mathrm{y}=۳ \end{cases} \\ + \\ \hline ۲\mathrm{x}=۴ \end{array}$$

$\boxed{\mathrm{x}=۲}$ و $\mathrm{x}+\mathrm{y}=۳$

$۲+\mathrm{y}=۳ \rightarrow \boxed{\mathrm{y}=۱}$

جواب دستگاه : $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$

ب)
$$۲\times\begin{cases} ۲\mathrm{x}-\mathrm{y}=۳ \\ \mathrm{x}+۲\mathrm{y}=۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} \begin{cases} ۴\mathrm{x}-۲\mathrm{y}=۶ \\ \mathrm{x}+۲\mathrm{y}=۴ \end{cases} \\ + \\ \hline ۵\mathrm{x}=۱۰ \end{array}$$

$\boxed{\mathrm{x}=۲}$ و $\mathrm{x}+۲\mathrm{y}=۴$

$۲+۲\mathrm{y}=۴$

$۲\mathrm{y}=۲ \rightarrow \boxed{\mathrm{y}=۱}$

جواب دستگاه : $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$

یکی از راه‌های حل کردن دستگاه معادله‌های خطی، حذف کردن x یا y است تا به یک معادلهٔ یک مجهولی برسیم؛ نام این روش، حذفی است.

کار در کلاس

دستگاه‌های معادله‌های خطی زیر را حل کنید.

۱) $\begin{cases} \mathrm{x}-\mathrm{y}=۳ \\ ۴\mathrm{x}+۲\mathrm{y}=۶ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} ۳\mathrm{x}-۵\mathrm{y}=۱ \\ ۲\mathrm{x}+۳\mathrm{y}=۷ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} ۳\mathrm{x}+۲\mathrm{y}=۵۰ \\ ۲\mathrm{x}+۲\mathrm{y}=۳۵ \end{cases}$

فعالیت

۱ــ دستگاه معادله‌های خطی زیر را به‌روش دیگری نیز می‌توان حل کرد.

$$\begin{cases} ۲x-۳y=۵ \\ y=\frac{۱}{۳}x-\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

(**راهنمایی** : هدف این است که به یک معادلهٔ یک مجهولی برسیم؛ بنابراین مقدار y را از معادلهٔ پایین در معادلهٔ بالا قرار دهید تا یک معادلهٔ یک مجهولی به‌دست آید؛ نام این روش، جایگزینی است).

$۲x-۳(\qquad\qquad)=۵$

۲ــ «طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۳ سانتی‌متر کمتر است. اگر محیط مستطیل ۲۴ سانتیمتر باشد، طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.» این مسئله توسط سه دانش‌آموز حل شده است. روش‌های هر کدام را توضیح دهید و کامل کنید.

روش ۱ :

۲x−۳ : طول مستطیل و x : عرض مستطیل

محیط = ۲(x+۲x−۳)=۲۴

روش ۲ :

y : طول مستطیل و x : عرض مستطیل

$$\begin{cases} y=۲x-۳ \\ ۲(x+y)=۲۴ \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} \begin{cases} ۲x-y=۳ \\ ۲x+۲y=۲۴ \end{cases} - \\ \hline -y-۲y=۳-۲۴ \end{array}$$

روش ۳ :

y : طول مستطیل و x : عرض مستطیل

$$\begin{cases} y=۲x-۳ \\ ۲(x+y)=۲۴ \rightarrow ۲(x+۲x-۳)=۲۴ \end{cases}$$

بین روش‌های اول و سوم چه شباهتی هست؟

کار در کلاس

دستگاه‌های زیر را به روش جایگزینی حل کنید.

$$۱)\begin{cases} x-۳y=۷ \\ ۲x-۷y=۱۵ \end{cases} \qquad ۲)\begin{cases} ۳x-y=۶ \\ ۲x+\frac{۱}{۳}y=۸ \end{cases}$$

تمرین

۱ــ دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$۱)\begin{cases} ۲(x-y)+۳y=۴ \\ ۳x-۲(۲x-y)=۷ \end{cases} \qquad ۲)\begin{cases} \frac{x-۱}{۲}-\frac{y-۱}{۳}=\frac{۱}{۶} \\ x+y=۴ \end{cases}$$

۲ــ یک جواب برای x و y طوری تعیین کنید که تساوی زیر برقرار باشد.

$$۲^{۲x-y-۲}=۳^{x+y-۱}$$

۳ــ معادلهٔ خطی بنویسید که از محل برخورد دو خط $x-y=۱$ و $x+y=۱$ بگذرد و شیب آن $-\frac{۲}{۳}$ باشد.

۴ــ در معادلهٔ $y=ax+۱$ اگر به جای a عددهای مختلفی قرار دهیم، معادلهٔ خط‌های زیادی به‌دست می‌آید. به ازای $a=۱$ و $a=۲$ و $a=-۱$ این خط‌ها را رسم کنید؛ این خطوط چه ویژگی مشترکی دارند؟

۵ــ در یک مزرعه، ۲۰ شترمرغ و گاو وجود دارد. پاهای آنها ۵۶ عدد است. در این مزرعه چند شترمرغ و چند گاو وجود دارد؟ (شترمرغ ۲ پا و گاو ۴ پا دارد)

۶ــ دستگاه معادلهٔ خطی زیر را از دو روش حذفی و ترسیمی حل کنید.

$$\begin{cases} ۲x-۳y=۷ \\ ۴x-۶y=۵ \end{cases}$$

آیا این دستگاه جواب دارد؟

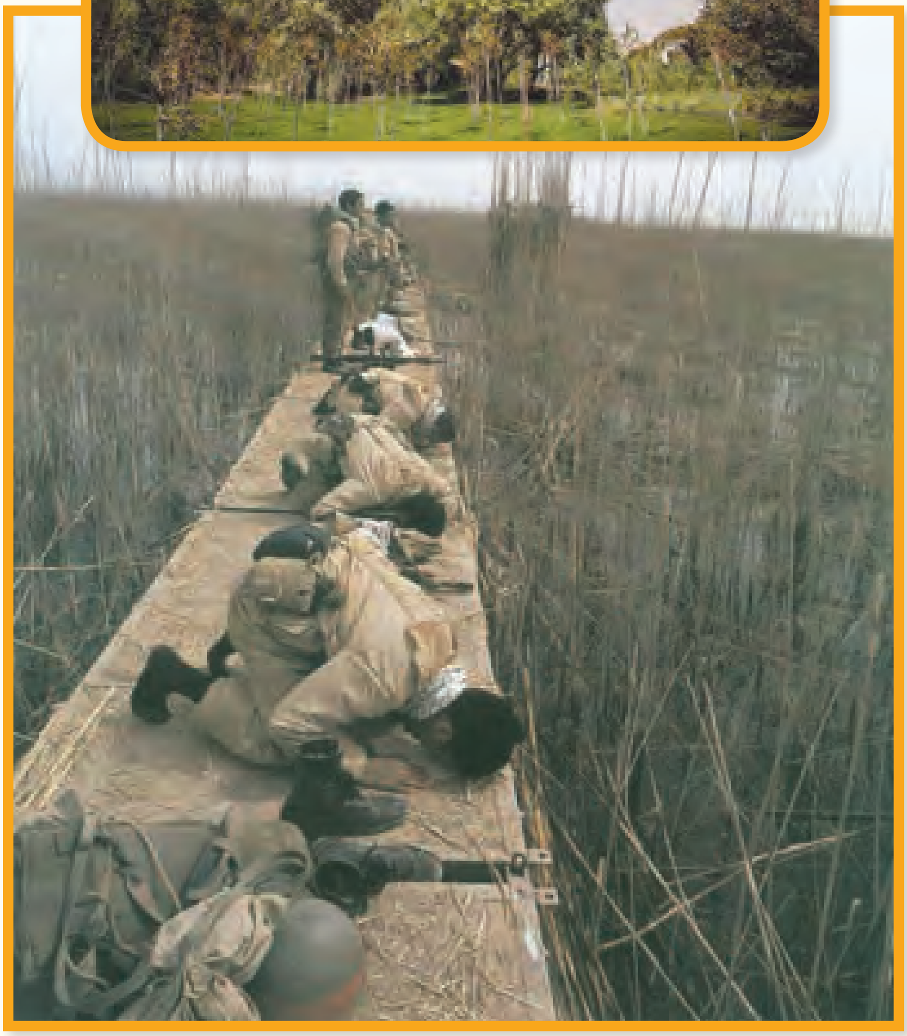
شیب هر دو خط را به‌دست آورید. توضیح دهید چرا نقطهٔ مشترکی به‌عنوان جواب معادله به‌دست نمی‌آید.

۷ــ مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال و اختلاف آنها ۲۶ سال است. سن هر یک را با تشکیل دستگاه معادلات به‌دست آورید.

فصل ۷

عبارت‌های گویا


پل طبیعت (تهران)


پل خیبر

پل‌ها نقش اساسی در زندگی انسان دارند. انواع مختلفی از پل‌ها وجود دارند و در موارد زیادی نیروهای وارد بر آنها از فرمول‌هایی به‌دست می‌آید که با یک عبارت گویا بیان می‌شوند. مثلاً در مورد پل‌های عابر پیاده بار محاسباتی از دستور $\frac{۱۵۰۰}{L+۵۰}+۲۰۰$ به‌دست می‌آید که در آن L طول بارگذاری شده برحسب متر است.

درس اوّل: معرفی و ساده کردن عبارت‌های گویا

مسئله

طول مستطیلی ۴ سانتی‌متر از عرض آن بیشتر است. اگر نسبت عرض به طول این مستطیل $\frac{۲}{۳}$ باشد، طول و عرض آن را به‌دست آورید.

اگر x را عرض مستطیل درنظر بگیریم، طول آن x+۴ است و نسبت عرض به طول را می‌توان با $\frac{x}{x+۴}$ نمایش داد؛ بنابراین:

$$\frac{x}{x+۴}=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳x = ۲x+۸ \Rightarrow x=۸$$ عرض   طول = ۱۲

عبارت $\frac{x}{x+۴}$ را، که نسبت دو چندجمله‌ای است، عبارت گویا می‌نامیم.

> به‌طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشد.

از عبارت‌های گویا در ریاضیات، علوم، پزشکی، مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه‌های دیگر استفاده می‌شود؛ به‌طور مثال سرعت متوسط اتومبیلی که مسیری را با سرعت $v_۱$ طی کرده و سپس از همان مسیر با سرعت $v_۲$ بازگشته است، از رابطهٔ $\frac{۲v_۱v_۲}{v_۱+v_۲}$ به‌دست می‌آید که عبارت گویای جبری است. برخی از مثال‌های دیگر از این قرار است:

محاسبهٔ جرم یک جسم با سرعت v و انرژی جنبشی k: $\frac{۲k}{v^۲}$

میانگین حسابی دو عدد a و b: $\frac{a+b}{۲}$

با توجه به تعریف بالا عبارت‌های زیر گویا هستند:

$$\frac{x^۲-\sqrt{۳}x+۱}{۹xy} \quad \text{و} \quad \frac{x}{y} \quad \text{و} \quad \frac{x-۳}{۴} \quad \text{و} \quad \frac{۲}{۵} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{۴} \quad \text{و} \quad \frac{x+۵}{x-۱} \quad \text{و} \quad \frac{۲x-۵}{۵x^۳-۲x^۲+۱}$$

$$x^۳+۲x-۷ \quad \text{و} \quad \frac{-a}{b} \quad \text{و} \quad \frac{x^۳}{۱} \quad \text{و} \quad \frac{xy^۲}{(x-y)^۲} \quad \text{و} \quad \frac{۳x+\sqrt{۷}}{x^۲} \quad \text{و} \quad \frac{۱۰}{x+۲} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{x}$$

امّا عبارت‌های زیر گویا نیستند. (چرا؟)

$$\frac{۱}{\sqrt{x-۲}} \quad \text{و} \quad |x-y| \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{x}}{x+y} \quad \text{و} \quad \sqrt{xy}$$

کار در کلاس

کدام‌یک از عبارت‌های زیر گویاست؟ چرا؟

$$\frac{|x|+|y|}{x} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{۲x}}{۲۵} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{۳}+x}{۵} \quad \text{و} \quad \frac{ah}{۲} \quad \text{و} \quad \frac{x+۶}{۳} \quad \text{و} \quad \frac{۷}{x-۱}$$

$$\frac{۳-a}{۲+x} \quad \text{و} \quad ۱۴ \quad \text{و} \quad \frac{mn+n^۲}{۵-n} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} \quad \text{و} \quad \frac{x-۵}{\sqrt{۳}+۱} \quad \text{و} \quad \frac{x\sqrt{y}+۱}{x^۲}$$

فعالیت

مقدار عددی عبارت $\frac{x+۵}{x-۳}$ را به ازای عددهای داده شده در جدول زیر به‌دست آورید :

x	-۲	۷	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	-۵
$\frac{x+۵}{x-۳}$						

به ازای $x=۳$ مخرج عبارت گویای $\frac{x+۵}{x-۳}$ مساوی صفر می‌شود و همان‌گونه که از قبل می‌دانید، $\frac{۸}{۰}$ به عنوان عدد تعریف نمی‌شود.

برای تعیین همه مقادیری که به‌ازای آنها یک عبارت گویا تعریف می‌شود، باید مقادیری از متغیر را حذف کنیم که به‌ازای آنها مخرج کسر صفر می‌شود؛ به‌عبارت دیگر این مقادیر را نمی‌توان به‌جای متغیر در عبارت جبری قرار داد و حاصل را محاسبه کرد.

مثال : عبارت گویای $\frac{۷x^۲+۱}{(x-۱)(x+۲)}$ به‌ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

حل : چه مقادیری مخرج کسر را صفر می کند؟

برای یافتن این عددها، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم؛ یعنی :

$(x-۱)(x+۲)=۰$

از طرفی وقتی حاصل‌ضرب چند عبارت برابر صفر شود، حداقل یکی از آنها صفر است؛ لذا :

$$\begin{cases}(x-۱)=۰ \Rightarrow x=۱\\ \text{یا}\\ (x+۲)=۰ \Rightarrow x=-۲\end{cases}$$

بنابراین عبارت گویای فوق به ازای $x=۱$ و $x=-۲$ تعریف نشده است.

کار در کلاس

هر یک از عبارت‌های زیر به‌ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

الف) $\dfrac{۸x+۵}{۲}$ ب) $\dfrac{۷+x}{x}$ ج) $\dfrac{۲b+۱}{۲b-۱}$

د) $\dfrac{۳x}{x^۲+۴}$ هـ) $\dfrac{x}{x^۲-۱}$ و) $\dfrac{a+۵}{a^۲-۵a+۶}$

ساده‌کردن یک عبارت گویا

کسر $\dfrac{۳۶}{۴۸}$ با کسرهای $\dfrac{۹}{۱۲}$، $\dfrac{۶}{۸}$، $\dfrac{۱۸}{۲۴}$ و $\dfrac{۳}{۴}$ مساوی است. بین این کسرها $\dfrac{۳}{۴}$ کسری است که دیگر قابل ساده شدن نیست؛ در واقع :

$$\frac{۳۶}{۴۸}=\frac{۳\times\cancel{۱۲}}{۴\times\cancel{۱۲}}=\frac{۳}{۴}$$

در ساده‌کردن هر عدد گویا می‌توان صورت و مخرج را به عددی غیرصفر تقسیم کرد؛ یعنی

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b} \quad (b\neq ۰\ ,\ c\neq ۰)$$

به همین ترتیب برای عبارت گویای $\dfrac{AC}{BC}$ داریم :

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$$

(A و B و C چند جمله‌ای هستند و $C\neq۰$ و $B\neq۰$)

فعالیت

هر یک از عبارت‌های گویای زیر چگونه ساده شده است؟ هر جا لازم است، راه‌حل را کامل کنید (چگونگی استفاده از اتحادها و تجزیه را در هر مورد توضیح دهید).

الف) $\dfrac{۱۸y^۳}{۶۰y^۵}=\dfrac{۳}{۱۰y^۲}$

ب) $\dfrac{x^۲+۶x+۹}{x^۲+۴x+۳}=\dfrac{(x+۳)\cancel{(x+۳)}}{(x+۱)\cancel{(x+۳)}}=\dfrac{x+۳}{x+۱}$

ج) $\frac{y^{۲}-۹}{۳y+۹}=\frac{(y+۳)(y-۳)}{۳(y+۳)}=$ ______

د) $\frac{۸ab^{۷}}{۲۰a^{۲}b^{۳}}=\frac{۲b^{۴}}{\quad}$

هـ) $\frac{b-۵}{۵-b}=\frac{b-۵}{-(b-۵)}=-۱$

کار در کلاس

۱ــ عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید :

الف) $\frac{m^{۲}-۱۶}{۴-m}$

ب) $\frac{۶m+۱۸}{۷m+۲۱}$

ج) $\frac{a^{۲}-۵a-۱۴}{a^{۲}+a-۲}$

د) $\frac{x^{۴}-y^{۴}}{y-x}$

۲ــ عبارت $\frac{a+ax}{a}$ به دو شکل ساده شده ؛ کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) $\frac{a+\cancel{a}x}{\cancel{a}}=a+x$

ب) $\frac{a+ax}{a}=\frac{a(۱+x)}{a}=۱+x$

تمرین

۱ــ برای هر عبارت گویا، مقادیری را به‌دست آورید که عبارت به‌ازای آنها تعریف نشده است.

الف) $\frac{۵x}{۳ab^{۲}}$

ب) $\frac{۲y}{y(۲y-۶)}$

ج) $\frac{۲P}{P^{۲}-P-۱۲}$

د) $\frac{۲x+۵}{x}$

هـ) $\frac{x^{۲}-۱}{x+۵}$

۲ــ حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید :

الف) $\frac{۳-x}{x^{۲}-۵x+۶}$

ب) $\frac{۴x^{۲}+۸x}{۱۲x+۲۴}$

ج) $\frac{۲۴x^{۲}}{۱۲x^{۲}-۶x}$

د) $\frac{y^{۳}-۲y^{۲}-۳y}{y^{۲}+y}$

هـ) $\frac{۱-t^{۴}}{t^{۲}+۱}$

و) $\frac{۶a^{۴}b^{۲}}{۴ab^{۸}}$

۳ـ عبارت‌هایی را که حاصل آنها ۱ و یا ۱− است، معلوم کنید.

ب) $\frac{۲y-۳}{۳-۲y}$ الف) $\frac{۲y+۳}{۲y-۳}$

د) $\frac{۲y+۳}{-۲y-۳}$ ج) $\frac{۲y+۳}{۳+۲y}$

۴ـ هر یک از عبارت‌های داده شده در سطر اول را به عبارت مساوی آن در سطر دوم وصل کنید.

۳) $\frac{۲-a}{a+۵}$	۲) $\frac{a+۲}{a+۵}$	۱) $\frac{a-۲}{a+۵}$
۶) $\frac{۲-a}{-a-۵}$	۵) $\frac{a-۲}{-a-۵}$	۴) $\frac{-a-۲}{-a-۵}$

۵ـ از عبارت‌های زیر، هر کدام را که با عبارت $\frac{z(x+y)}{t}$ برابر است، مشخص کنید.

ج) $\frac{۱}{t}\times z(x+y)$ ب) $\frac{zx+y}{t}$ الف) $\frac{z}{t}(x+y)$

و) $\frac{zx}{t}+y$ هـ) $\frac{zx}{t}+\frac{zy}{t}$ د) $z\times\frac{x+y}{t}$

۶ـ در جای خالی چه عبارتی باید نوشت؟

ب) $\frac{۳x}{x-۳}=\frac{\boxed{}}{x^{۲}-x-۶}$ الف) $\frac{۱-z}{z}=\frac{\boxed{}}{z(z^{۲}+۱)}$

د) $\frac{(x-۵)(\boxed{})}{(x-۲)(x-۵)}=x+۱$ ج) $\frac{۳y+۲}{۵}=\frac{۱}{۵}(\boxed{})$

درس دوم: محاسبات عبارت‌های گویا

ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا

عبارت‌های گویا را همانند عددهای گویا می‌توان در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد. در مورد عددهای گویا قوانین زیر را داریم:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \quad (b\,,d\neq 0) \qquad \text{و} \qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc} \quad (b\,,c\,,d\neq 0)$$

در ضمن در مورد عبارات گویا هم هرجا که امکان داشته باشد، می‌توان عبارت را ساده کرد.

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از ضرب‌ها و یا تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده است. هرجا لازم است، راه‌حل را کامل و حاصل عبارت را ساده کنید.

الف) $\dfrac{\overset{1}{\cancel{5}}xy^3}{\underset{1}{\cancel{8}}x^2z^2}\times\dfrac{\overset{2}{\cancel{16}}z^3}{\underset{3}{\cancel{15}}y^2}=\dfrac{2yz}{3x}$

ب) $\dfrac{x+3}{x}\times\dfrac{x^2}{x^2-2x-15}=\dfrac{\cancel{x+3}}{x}\times\dfrac{x^2}{\cancel{(x+3)}(x-5)}=\underline{\qquad\qquad}$

ج) $\dfrac{x-6}{x^2-12x+36}\times\dfrac{x^2-3x-18}{x^2+7x+12}=\dfrac{x-6}{(\qquad)(\qquad)}\times\dfrac{(\qquad)(\qquad)}{(x+3)(x+4)}=\dfrac{1}{x+4}$

د) $\dfrac{4x^2}{3xy}\div\dfrac{8x}{y^3}=\dfrac{4x^2}{3xy}\times\dfrac{y^3}{8x}=\dfrac{\qquad}{6}$

هـ) $\dfrac{a^2-4a-5}{a^2-4a}\div\dfrac{a^2+3a+2}{a-4}=\dfrac{a^2-4a-5}{a^2-4a}\times\dfrac{a-4}{a^2+3a+2}$

$=\dfrac{(a+1)(a-5)}{a(\qquad)}\times\dfrac{a-4}{(\qquad)(\qquad)}=\dfrac{a-5}{\qquad}$

کار در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\frac{a^۲-a-۶}{a+۳}\times\frac{a+۳}{a^۲-۴}$

ب) $\frac{a^۲b+ab^۲}{a}\times\frac{۳ab}{(a+b)^۲}$

ج) $\frac{x^۲+۳x+۲}{x+۲}\div\frac{x+۱}{x+۵}$

د) $\frac{۴x^۴}{۳xy^۲}\div\frac{۸x}{۹y^۵}$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا

جمع و تفریق عبارت‌های گویا مشابه جمع و تفریق عددهای گویاست؛ در مورد عددهای گویا داریم :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$
$$(b\,,d\neq ۰)$$

و

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$
$$(b\neq ۰)$$

به طریق مشابه می‌توان دو عبارت گویا را جمع یا تفریق کرد.

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از محاسبات زیر چگونه انجام شده است. هرجا لازم است راه‌حل را کامل، و مانند نمونه یک جمع و تفریق عددی مشابه آن ارائه کنید.

$$\frac{۳}{۵}+\frac{۴}{۵}=\frac{۷}{۵}$$

الف) $\frac{۳x+۷}{x+۲}+\frac{۲x-۳}{x+۲}=\frac{۳x+۷+۲x-۳}{x+۲}=\_\_\_\_\_\_$

$$\_\_\_-\_\_\_=\_\_\_$$

ب) $\frac{۳x+۷}{x+۲}-\frac{۲x-۳}{x+۲}=\frac{۳x+۷-(۲x-۳)}{x+۲}=\_\_\_\_\_\_$

$$\frac{۷}{۱۰}+\frac{۹}{۵}=\frac{}{۱۰}$$

ج) $\frac{a^۲-۲۰}{a^۲-۴}+\frac{a-۲}{a+۲}=$

$$\frac{۱}{۲}-\frac{۵}{۳}=\_\_\_\_$$

د) $\frac{۲}{x+۲}-\frac{x-۱}{x+۴}=$

کار در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\dfrac{x^۲}{x-y}+\dfrac{y^۲}{y-x}$

ب) $\dfrac{۶}{۵x}-\dfrac{۴}{x}$

ج) $\dfrac{۲x^۲-۱۶}{x^۲-۴}-\dfrac{x+۴}{x+۲}$

د) $\dfrac{۷}{x^۲-x-۲}+\dfrac{x}{x^۲+۴x+۳}$

ساده کردن عبارت‌های مرکب

هنگام ساده‌کردن هر عبارت گویای مرکب، همانند کسرهای مرکب می‌توان صورت و مخرج را جداگانه ساده و سپس آنها را برهم تقسیم کرد و یا از همان ابتدا صورت و مخرج را در عبارتی مناسب (و غیرصفر) ضرب کرد.

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از روش‌های ارائه شده برای ساده کردن کسر مرکب با روش دیگر چه تفاوتی دارد؛ هرجا لازم است راه‌حل را کامل کنید. $(x\neq ۰)$

۱) الف) $\dfrac{۱-\dfrac{۱}{x}-\dfrac{۶}{x^۲}}{۱-\dfrac{۴}{x}+\dfrac{۳}{x^۲}}=\dfrac{x^۲(۱-\dfrac{۱}{x}-\dfrac{۶}{x^۲})}{x^۲(۱-\dfrac{۴}{x}+\dfrac{۳}{x^۲})}=$

ب) $\dfrac{۱-\dfrac{۱}{x}-\dfrac{۶}{x^۲}}{۱-\dfrac{۴}{x}+\dfrac{۳}{x^۲}}=\dfrac{\dfrac{x^۲-x-۶}{x^۲}}{\dfrac{x^۲-۴x+۳}{x^۲}}=\dfrac{x^۲-x-۶}{x^۲}\div\dfrac{x^۲-۴x+۳}{x^۲}=\dfrac{x^۲-x-۶}{\cancel{x^۲}}\times\dfrac{\cancel{x^۲}}{x^۲-۴x+۳}$

$=\_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_$

۲) الف) $\dfrac{\dfrac{۲}{a}-\dfrac{۳}{a+۱}}{\dfrac{۲}{a+۱}-\dfrac{۳}{a}}=\dfrac{a(a+۱)(\dfrac{۲}{a}-\dfrac{۳}{a+۱})}{a(a+۱)(\dfrac{۲}{a+۱}-\dfrac{۳}{a})}=$ ______

ب) $\dfrac{\dfrac{۲}{a}-\dfrac{۳}{a+۱}}{\dfrac{۲}{a+۱}-\dfrac{۳}{a}}=$

$a\neq ۰$ و $a\neq -۱$

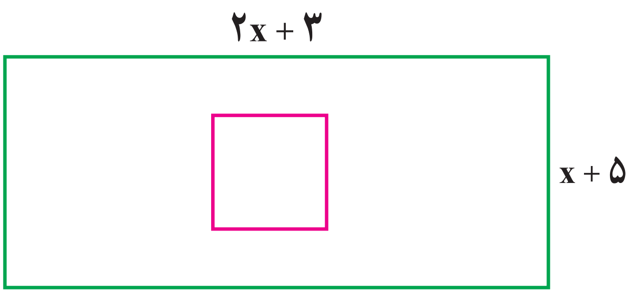
کار در کلاس

حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید. (مخرج همهٔ کسرها مخالف صفر فرض شده است)

الف) $\dfrac{n-\dfrac{n^۲}{n-m}}{۱+\dfrac{m^۲}{n^۲-m^۲}}=$

ب) $\dfrac{\dfrac{y}{x+y}-\dfrac{x}{x-y}}{\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}}=$

فعالیت



طول ضلع مربع داخل مستطیل، نصف عرض مستطیل است. اگر نسبت مساحت مربع به مساحت مستطیل $\dfrac{۵}{۲۶}$ باشد، طول و عرض مستطیل را به دست آورید.

راه‌حل را کامل کنید و توضیح دهید: چگونه به کمک ساده کردن عبارت گویای به‌دست آمده و حل معادله، پاسخ به‌دست می‌آید؟

طول ضلع مربع $=\dfrac{x+۵}{\quad}$ $\qquad\qquad$ مساحت مربع $=(\underline{\qquad})^۲$

$\frac{۵}{۲۶} = \underline{\qquad\qquad\qquad} = \frac{\text{مساحت مربع}}{\text{مساحت مستطیل}}$ و (   )(   )= مساحت مستطیل

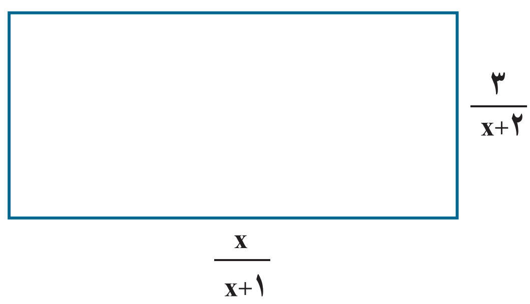
$$\Rightarrow \frac{(x+۵)^۲}{۴(\qquad)(۲x+۳)} = \frac{۵}{۲۶} \Rightarrow \frac{x+۵}{۴x+۶} = \frac{۵}{۱۳} \Rightarrow$$

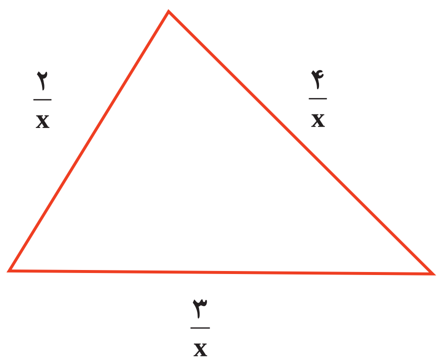
$$\Rightarrow ۷x=۳۵ \Rightarrow x=۵$$

= طول   = عرض

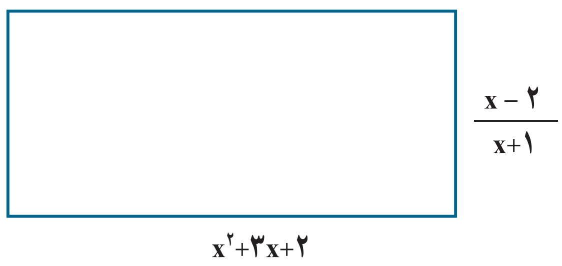
کار در کلاس

۱ــ محیط هر شکل را برحسب x به‌دست آورید و آن را ساده کنید. $(x>۰)$





۲ــ مساحت مستطیل زیر را برحسب x به‌دست آورید. $(x>۲)$



تمرین

۱ــ ضرب و تقسیم‌های زیر را انجام دهید. (در همهٔ تمرین‌ها مخرج کسرها مخالف صفر فرض شده است)

الف) $\frac{a^۲-۱۶}{a+۴} \times \frac{a+۲}{a^۲-۸a+۱۶}$

ب) $\frac{m^۲-۴۹}{m+۱} \div \frac{۷-m}{m^۲-۱}$

ج) $\frac{x^۲-۴x+۴}{۴x^۲y-۸xy} \div \frac{x^۲+x-۶}{۶x+۱۸}$

د) $\frac{۱-c^۲}{b^۳} \times \frac{b^۲}{۱-۲c+c^۲}$

۲ــ جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}-\frac{y(x-y)^{۲}}{x^{۴}-y^{۴}}$ ب) $\frac{x+۷}{ax-bx}+\frac{y+۹}{by-ay}$

ج) $\frac{a^{۲}-b^{۲}}{a-b}-\frac{a^{۳}-b^{۳}}{a^{۲}-b^{۲}}$ د) $\frac{۴+x^{۲}-۲x}{۲+x}-۲-x$

۳ــ فقط یکی از عبارت‌های گویای زیر قابل ساده شدن است؛ آن را مشخص و ساده کنید.

$\frac{a^{۲}+۵}{a^{۲}}$ و $\frac{a^{۲}+۳}{۳}$ و $\frac{a^{۲}+b^{۲}}{a^{۲}}$ و $\frac{a^{۲}-۵a}{a}$

۴ــ از میان عبارت‌های زیر، هر کدام را که مساوی عبارت $\frac{x}{y}$ است، معلوم کنید.

الف) $\frac{x+۳}{y+۳}$ ب) $\frac{۳-x}{۳-y}$ ج) $\frac{۳x}{۳y}$ د) $\frac{x^{۳}}{y^{۳}}$ هـ) $\frac{a^{۳}x}{a^{۳}y}$

۵ــ عبارت $\frac{-x+۳}{x+۵}$ با کدام‌یک از عبارت‌های زیر برابر است؟

الف) $-\frac{x+۳}{x+۵}$ ب) $-\frac{x-۳}{x+۵}$ ج) $\frac{x-۳}{x+۵}$ د) $-\frac{۳-x}{x+۵}$

۶ــ کدام‌یک از عبارت‌های زیر به درستی ساده شده است؟

الف) $\frac{a+۵}{a^{۲}-۲۵}=\frac{a+۵}{(a+۵)(a-۵)}=a-۵$ ب) $\frac{a+۵}{a^{۲}-۲۵}=\frac{a+۵}{(a+۵)(a-۵)}=\frac{۱}{a-۵}$

۷ــ اگر $A=a^{۲}-b^{۲}$ و $B=a^{۲}+b^{۲}$ و $C=۲ab$، حاصل عبارت $\frac{A^{۲}-B^{۲}}{C^{۲}}$ را به‌دست آورید.

۸ــ کدام‌یک از تساوی‌های زیر، درست و کدام‌یک نادرست است؟ موارد نادرست را اصلاح کنید. (همهٔ عبارت‌های جبری تعریف شده فرض می‌شود.)

الف) $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{a-b}{ab}$

ب) $\frac{x^{۱۳}}{x^{۲۰}}=x^{۷}$

ج) $\frac{a}{۵}-\frac{۷-b}{۵}=\frac{a-۷-b}{۵}$

د) $\frac{a-b}{b-a}=۱$

هـ) $\frac{۱}{a-b}=\frac{-۱}{a+b}$

و) $\frac{a^{۲}-b^{۲}}{a-b}=a+b$

ز) $\frac{ca+cb}{c+cd}=\frac{a+b}{d}$

ح) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}}=\frac{c}{b}$

۹ــ طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این مستطیل را به‌صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید.

۱۰ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید و نتیجه را ساده کنید.

الف) $\dfrac{\frac{a-a^{۲}}{a^{۲}-۱}}{\frac{a}{a+۱}-a}$

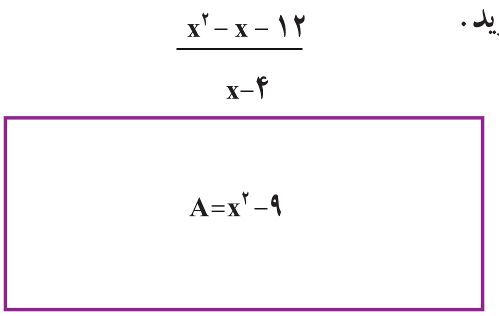
ب) $\dfrac{\frac{۱}{x-y}-\frac{۲}{x+y}}{\frac{x^{۲}-۹y^{۲}}{(x-y)^{۲}}}$

۱۱ــ دو عبارت گویا بنویسید که :

الف) حاصل‌ضرب آنها $\frac{a-۲}{a+۷}$ شود.

ب) حاصل جمع آنها $\frac{a-۲}{a+۷}$ شود.

۱۲ــ عرض مستطیل مقابل را برحسب x به‌دست آورید.
مساحت مستطیل $x^{۲}-۹$ است.



درس سوم: تقسیم چندجمله‌ای‌ها

۱ــ تقسیم تک جمله‌ای بر تک جمله‌ای (در تمام این درس مخرج کسرها مخالف صفر فرض شده است)

ــ برای تقسیم دو تک جمله‌ای بر یکدیگر از قوانین ساده‌کردن کسرها و نیز قوانین مربوط به ساده کردن توان‌ها استفاده می‌کنیم.

مثال

$$\frac{-18a^2xz^4}{27x^6z}=\frac{-2a^2z^3}{3x^5} \quad \text{و} \quad \frac{14x^5y}{2x^2y^2}=\frac{7x^3}{y}$$

۲ــ تقسیم چند جمله‌ای بر تک جمله‌ای

اگر a و b و c اعدادی صحیح و d عددی صحیح و غیرصفر باشد، داریم:

$$\frac{a+b+c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}$$

به طور مشابه برای تقسیم چند جمله‌ای $12x^3-18x+2$ بر ۶ به‌روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{12x^3-18x+2}{6}=\frac{12x^3}{6}-\frac{18x}{6}+\frac{2}{6}=2x^3-3x+\frac{1}{3}$$

فعالیت

توضیح دهید: هر یک از تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده است؟ جاهای خالی را پر و حل را کامل کنید.

الف) $\frac{2a^4+5a^3-8a}{4a^2}=\frac{2a^4}{4a^2}+\frac{5a^3}{4a^2}-\frac{8a}{4a^2}=$

ب) $\frac{14x^3yz-6xy+3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z}=$ ــــــــ $-$ ــــــــ $+$ ــــــــ

ج) $(8y^3-4y^2+12y)\div(-4y^2)=\frac{8y^3-4y^2+12y}{-4y^2}=$

کار در کلاس

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{-21a^7b^4c}{28ab^6}$

ب) $\frac{24x^6y-2z+3xyz}{x^2z}$

۳ـ تقسیم چند جمله‌ای بر چندجمله‌ای

اگر تقسیم مقابل را درنظر بگیریم :

$$\begin{array}{r|l} 26 & 8 \\ -24 & 3 \\ \hline 2 & \end{array}$$

عدد ۲۶ را مقسوم، ۸ را مقسوم علیه، ۳ را خارج‌قسمت و ۲ را باقی‌مانده می‌نامیم. رابطه‌های تقسیم بالا به‌صورت زیر است :

$$\begin{cases} 3\times 8+2=26 \\ 2<8 \end{cases}$$

مثال : چند جمله‌ای $2x^2-7x-15$ را بر چند جمله‌ای $x-5$ تقسیم کنید.

چند جمله‌ای $2x^2-7x-15$ را مقسوم و $x-5$ را مقسوم علیه می‌نامیم. در اولین گام باید مقسوم و مقسوم‌علیه را برحسب توان‌های متغیر موجود (در اینجا x) از بزرگ به کوچک مرتب کرد.

در مثال ما چندجمله‌ای‌های موردنظر مرتب شده هستند.

اکنون اولین جمله مقسوم را بر اولین جملهٔ مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم؛ یعنی : $\frac{2x^2}{x}=2x$

$$\begin{array}{l|l} 2x^2-7x-15 & x-5 \\ +2x^2-10x & 2x \\ \hline \end{array}$$

حاصل‌ضرب $2x$ در $x-5$ را به‌دست می‌آوریم و آن را از عبارت مقسوم کم می‌کنیم :

$$2x^2-7x-15-(2x^2-10x)=2x^2-7x-15-2x^2+10x=+3x-15$$

برای آسان‌تر شدن، می‌توانیم پس از محاسبهٔ حاصل‌ضرب $2x$ در $x-5$، در پیرابند[1] (کادر) بالا علامت عبارت حاصل را قرینه کنیم و محاسبه را انجام دهیم؛ یعنی :

۱ــ مصوّب فرهنگستان

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{2x^2} - 7x - 15 & x - 5 \\
\hline
+\cancel{2x^2} - 10x & 2x \\
- \qquad + & \\
\hline
\qquad 3x - 15 &
\end{array}
$$

اکنون دوباره $3x-15$ را بر $x-5$ تقسیم و مراحل قبل را تکرار می‌کنیم؛ یعنی اولین جمله عبارت $3x-15$ را بر اولین جملهٔ $x-5$ تقسیم می‌کنیم. توجه داریم که این چند جمله‌ای‌ها نیز باید برحسب توان‌های نزولی مرتب شده باشند؛ داریم : $\frac{3x}{x} = 3$

این تقسیم‌ها را تا زمانی ادامه می‌دهیم که یا باقیمانده صفر شود یا درجه چند جمله‌ای باقیمانده از درجه مقسوم‌علیه کمتر شود.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^2 - 7x - 15 & x - 5 \\
\hline
\pm 2x^2 \mp 10x & 2x + 3 \\
\hline
\qquad \cancel{3x} - \cancel{15} & \\
\qquad \pm \cancel{3x} \mp \cancel{15} & \\
\hline
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

وقتی باقیمانده صفر باشد، می‌گوییم مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر است.

فعالیت

۱ــ تقسیم‌های زیر را انجام دهید و مراحل کار را توضیح دهید. جاهای خالی را پر و حل را کامل کنید.

الف)

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3 - 3x^2 + x + 7 & x^2 - 2 \\
\hline
\pm 4x^3 \qquad \mp 8x & \boxed{x} \\
\hline
\quad -3x^2 + 9x + 7 &
\end{array}
$$

باقیمانده این تقسیم چیست؟

ب)

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 - 5x - 24 & x - 8 \\
\hline
 & \boxed{} + \boxed{}
\end{array}
$$

۲ـ تقسیم زیر را انجام دهید و رابطهٔ تقسیم را بنویسید. راه‌حل را کامل کنید.

$$\begin{array}{l|l} 10x^4-3x^2+2x-19 & -3+2x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 10x^4-3x^2+2x-19 & 2x^2-3 \\ \cline{2-2} +10x^4-15x^2 & 5x^2+\boxed{} \\ -\qquad + & \\ \hline \end{array}$$

رابطه‌های تقسیم:

$(5x^2+\boxed{})(2x^2-3)+$ ــــــ

$=$ ــــــــــــــــ

$=10x^4-3x^2+2x-19$

و درجه چند جمله‌ای باقیمانده از درجه $2x^2-3$ کمتر است.

کار در کلاس

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\begin{array}{l|l} 6x^3-19x^2+16x-4 & 2-x \\ \cline{2-2} \end{array}$

ب) $\begin{array}{l|l} -x^3-12+8x & x+6 \\ \cline{2-2} \end{array}$

تمرین

۱ـ تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\dfrac{-2x^2y^3z^7}{18xz^5}$

ب) $\dfrac{2a^3y-a^4y^2+15xy}{-5y^2}$

ج) $(x^3-27)\div(x-2)$

د) $(3y^2-10y-24)\div(3y-4)$

هـ) $\begin{array}{l|l} 2x^5+5x^4-2x^3+2x^2-2x+3 & x+3 \\ \cline{2-2} \end{array}$

۲ـ خارج قسمت و باقیماندهٔ تقسیم زیر را مشخص کنید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن روابط تقسیم نشان دهید.

$\begin{array}{l|l} -3x^4+4x^6+x^2+5 & 1-x^3 \\ \cline{2-2} \end{array}$

۳ـ حجم یک جعبه به شکل مکعب مستطیل برابر با $2x^3+15x^2+28x$ است. اگر ارتفاع این جعبه x و طول آن $x+4$ باشد، عرض آن را به‌دست آورید.

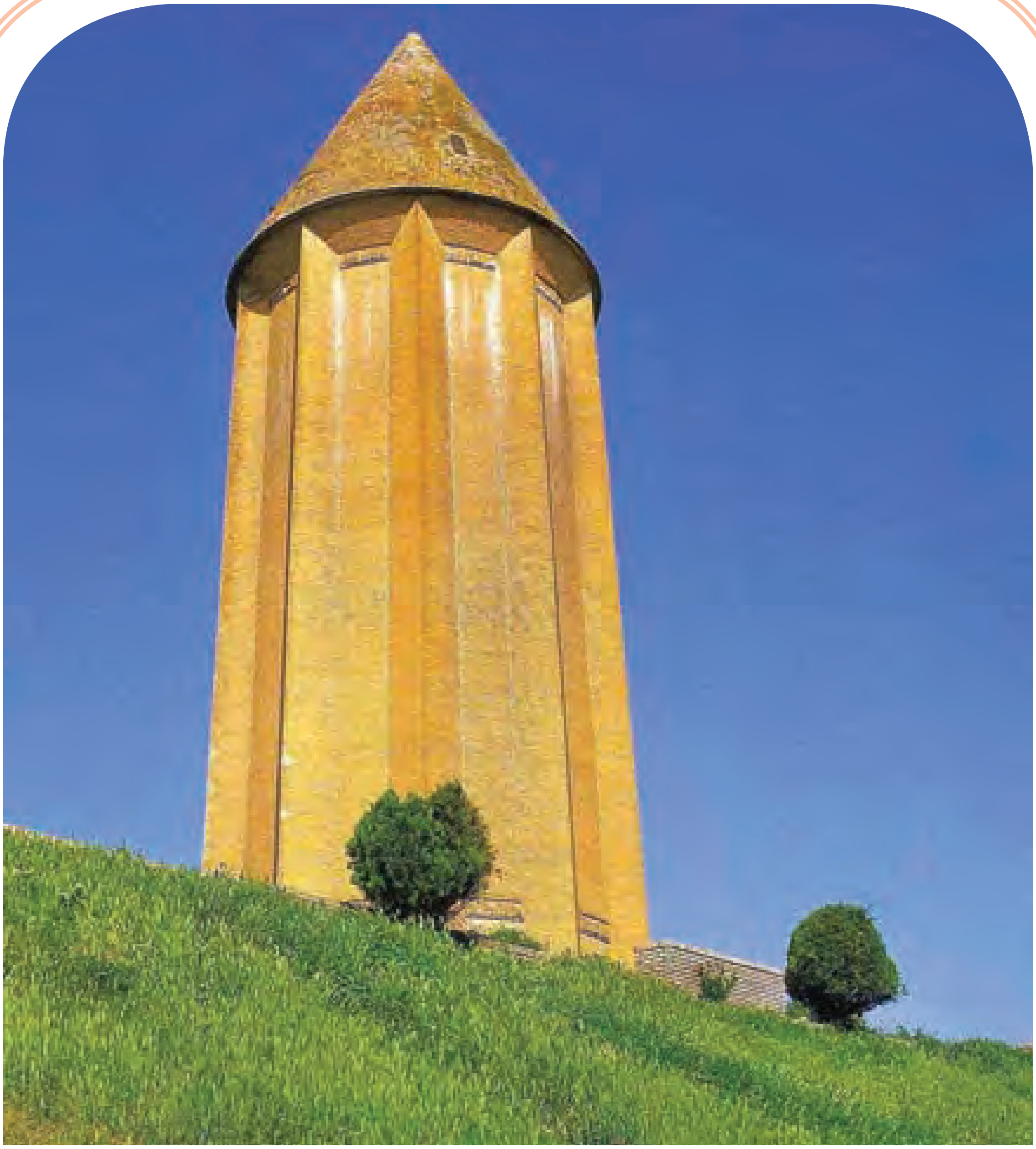
۴ـ اگر چند جمله‌ای $20x^3+23x^2-10x+a$ بر $4x+3$ بخش‌پذیر باشد، a را به‌دست آورید.

۵ـ خارج قسمت و باقیماندهٔ تقسیم عبارت $2x^2-9x+9$ را بر هر یک از عبارت‌های زیر به‌دست آورید.

$2x+3$ و $2x-3$ و $x-3$ و $x+3$

فصل ۸

حجم و مساحت



گنبد قابوس بنایی تاریخی از سدهٔ چهارم هجری است که در شهر گنبد کاووس در استان گلستان قرار دارد. این بنا بلندترین برج تمام آجری جهان به شمار می‌رود. این برج استوانه‌ای که گنبدی مخروطی شکل روی آن قرار گرفته است، ۵۵ متر ارتفاع دارد. ستون‌هایی به شکل منشور روی بدنهٔ استوانه‌ای این برج قرار گرفته است. شما در این فصل با حجم‌های استوانه، مخروط و منشور آشنا می‌شوید.

درس اوّل: حجم و مساحت کره

در سال‌های قبل با انواع حجم‌های هندسی آشنا شدید. این حجم‌ها به سه دسته تقسیم می‌شوند: منشوری، کروی و هرمی.

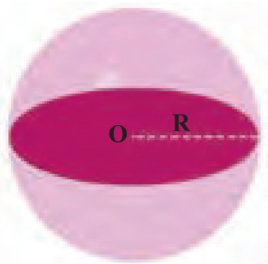
کرهٔ زمین و توپ بسکتبال نمونه‌هایی از حجم‌های کروی است. چند نمونهٔ دیگر از حجم‌های کروی را نام ببرید.

فعالیت

۱ــ به تعریف دایره به‌عنوان یک شکل هندسی مسطح توجه کنید:

دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که همهٔ آن نقطه‌ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصلهٔ ثابت و مشخص هستند. به این اندازهٔ ثابت، شعاع دایره می‌گوییم.

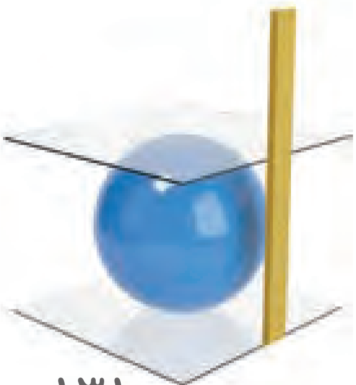
با توجه به این تعریف در قسمت زیر، کره را به‌عنوان یک شکل هندسی فضایی تعریف کنید.

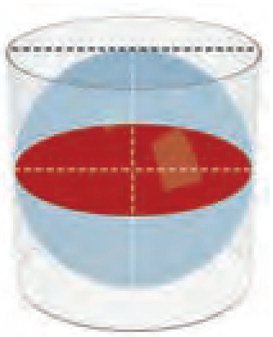


کره مجموعه ________ از فضا است که ____________________ مرکز ____________________ هستند. به این اندازه ________ می‌گوییم.

۲ــ کارهای زیر را انجام دهید تا در انتهای فعّالیت، راه محاسبهٔ حجم کره را پیدا کنیم.

- یک توپ پلاستیکی به شکل کره تهیه کنید.
- مانند شکل مقابل با قرار دادن دو سطح صاف موازی، قطر کره را اندازه بگیرید.





● مانند شکل مقابل به کمک طلق، یک استوانه درست کنید، به‌طوری که توپ کروی به‌طور کامل درون آن قرار گیرد و از اطراف، بالا و پایین بر آن مماس شود.

در این حالت می‌گوییم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است. اگر شعاع کره R باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعدهٔ آن را بر حسب R نشان دهید.

ارتفاع استوانه :

شعاع قاعده استوانه :   حجم استوانه :

● توپ را از استوانه خارج کنید و با دقت آن را ببرید تا به دو نیم کرهٔ مساوی تبدیل شود. مانند شکل مقابل، یکی از نیم کره‌ها را داخل استوانه بگذارید و نیم کرهٔ دیگر را از آب پر و در استوانه خالی کنید. اگر این کار را با دقت انجام دهید و استوانه را خوب آب‌بندی کرده باشید که آبی از آن خارج نشود، با دو نیم کره، فضای باقیمانده پر از آب می‌شود.

الف) حجم استوانه،چند برابر حجم نیم کره است؟

ب) حجم استوانه چند برابر حجم کره است؟

ج) بنابراین حجم کره ــــــــ برابر حجم استوانه است.

د) با توجه به دستور محاسبهٔ حجم استوانه، که در بالا ذکر شد، دستور محاسبهٔ حجم کره به شعاع R را به‌دست آورید.

حجم کره‌ای به شعاع R از دستور $V=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$ به‌دست می‌آید.

کار در کلاس

۱ــ کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع ۱۰ سانتی‌متر محاط شده است.

الف) حجم کره را به‌دست آورید.

ب) حجم استوانه را به‌دست آورید.

ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به‌دست آورید.

۲ــ حجم نیم کره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر را به‌دست آورید.

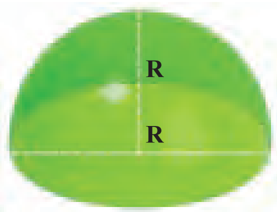
فعالیت

مانند شکل مقابل، نیم‌کره‌ای را که از نصف کردن توپ پلاستیکی به‌دست آوردید، روی یک صفحهٔ کاغذ قرار دهید و دو بار روی کاغذ، دایره رسم کنید طوری‌که نیم‌کره بتواند روی این دایره‌ها قرار گیرد و آن را بپوشاند.

این دو دایره کاغذی را هرطور که دوست دارید، برش بزنید و کاغذهای بریده شده را روی سطح نیم‌کره بچسبانید. مراقب باشید تا حدامکان، کاغذها روی هم قرار نگیرند و سطح نیم‌کره نیز دیده نشود.

آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم‌کره را با این دو دایره بپوشانید؟

دربارهٔ مشکلات این کار و تقریبی بودن آن و راه‌های افزایش دقت این کار با یکدیگر گفت‌وگو کنید.



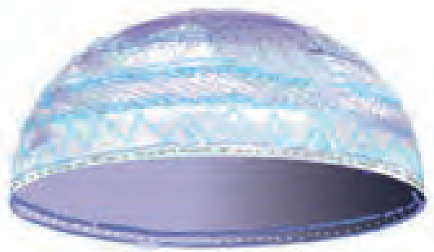
ثابت می‌شود که مساحت رویهٔ یک نیم‌کره به شعاع R، دو برابر مساحت دایره‌ای است که نیم‌کره روی آن ایستاده است (قاعدهٔ نیم‌کره).

الف) پس مساحت رویهٔ نیم‌کره برابر است با : ــــــــــــــــ

ب) در نتیجه مساحت کره به شعاع R برابر است با : ــــــــــــــــ

مساحت یک کره به شعاع R برابر است با : $S=۴\pi R^۲$

کار در کلاس



۱ــ مساحت یک کلاه (عرق‌چین) به شکل رویهٔ نیم‌کره به شعاع ۱۰ سانتی‌متر را پیدا کنید.

۲ــ می‌خواهیم یک نیم‌کرهٔ چوبی توپر به شعاع ۱۰ سانتی‌متر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت رنگ شده را پیدا کنید.

بین محاسبهٔ مساحت کل نیم‌کرهٔ چوبی توپر و مساحت رویهٔ یک عرق‌چین چه تفاوتی هست؟

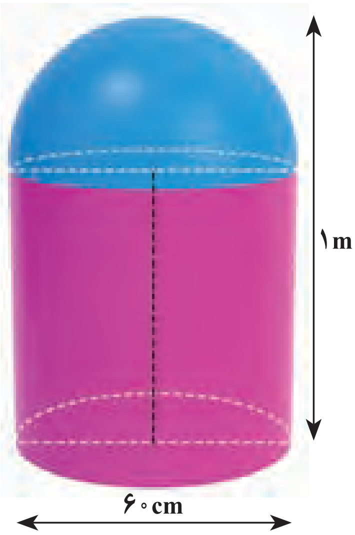
تمرین

۱ــ قطر تقریبی کرهٔ زمین حدود ۱۲۸۰۰ کیلومتر است.

الف) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.

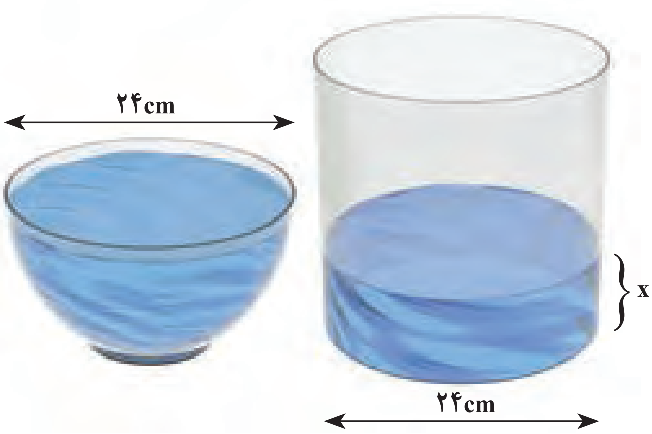
ب) مساحت تقریبی رویه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع با نماد علمی بنویسید.

ج) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود ۱/۶۴۸/۰۰۰ کیلومترمربع است. مساحت ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.



۲ــ یک استوانک[1] (کپسول) گاز از قرار گرفتن یک نیمکره روی یک استوانه به‌صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایرهٔ قاعدهٔ استوانک ۶۰ سانتی‌متر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم استوانک را بر حسب متر مکعب به‌دست آورید.

اگر بخواهیم سطح کل این استوانک را رنگ کنیم، چند کیلوگرم رنگ لازم است، به‌شرط اینکه رنگ‌آمیزی هر متر مربع به ۱۰۰ گرم رنگ نیاز داشته باشد؟

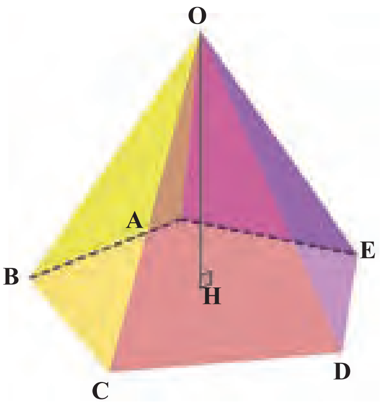


۳ــ پیمانه‌ای به شکل نیمکره و به قطر دهانهٔ ۲۴ سانتی‌متر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

۱ــ مصوّب فرهنگستان

درس دوم: حجم هرم و مخروط

یکی دیگر از حجم‌های هندسی، حجم هرمی است. به‌طور حتم نام اهرام مصر را شنیده‌اید. نمونهٔ دیگری از شکل‌های هرمی را نام ببرید.



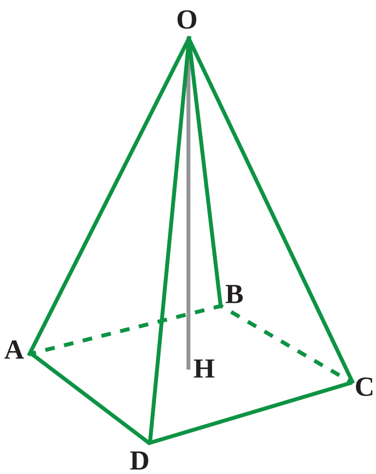
هرم، یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است. قاعدهٔ هرم، یک چند ضلعی است. مانند شکل مقابل روی تمام محیط این چند ضلعی، سطح‌هایی قرار دارد که در یک نقطه به نام رأس، یکدیگر را قطع می‌کنند. به این سطح‌ها وجه جانبی می‌گویند.

در هرم مقابل، نام رأس : .... تعداد وجه‌ها : ....

شکل وجه‌ها : .... شکل قاعده : .... نام قاعده : ....

به فاصلهٔ رأس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از رأس بر قاعده رسم می‌شود، ارتفاع هرم می‌گویند. در شکل، OH بر قاعدهٔ ABCDE عمود است و ارتفاع هرم است. معمولاً برای نام‌گذاری هرم از رأس شروع می‌کنیم؛ به‌عنوان مثال هرم بالا به‌صورت OABCDE خوانده می‌شود.

فعالیت



۱ــ اگر چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی با هم، هم‌نهشت باشند، هرم را منتظم می‌گوییم. در این صورت اگر قاعده، مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع (نقطهٔ برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن می‌افتد.

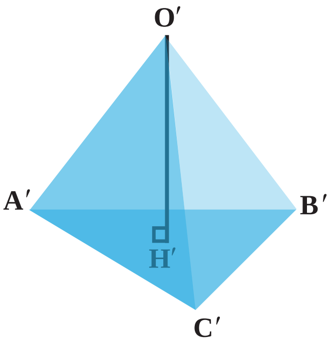
در هرم منتظم مقابل، نام رأس : ــــــ ارتفاع : ــــــ

شکل قاعده : ــــــ شکل وجه‌های جانبی : ــــــ تعداد وجه‌ها : ــــــ

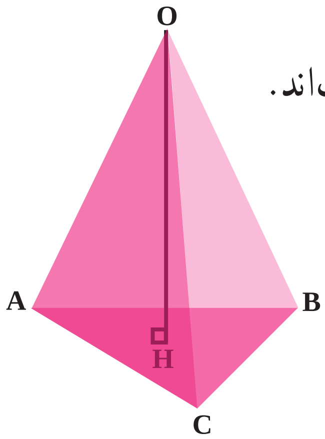
۲ــ الف) با توجه به شکل‌ها و اطلاعات داده شده به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟ در

شکل‌های (۱) و (۲)مثلث‌های قاعده هم نهشت‌اند.

$O'H' < OH \Rightarrow V' \bigcirc V$



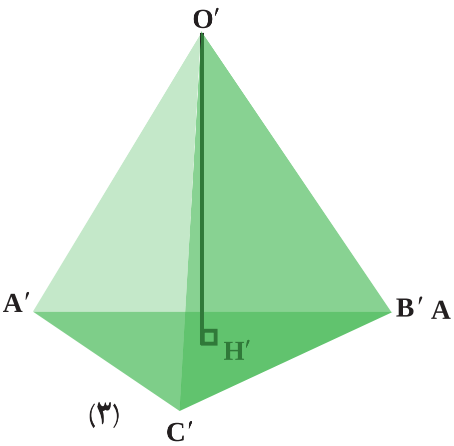
(۱)



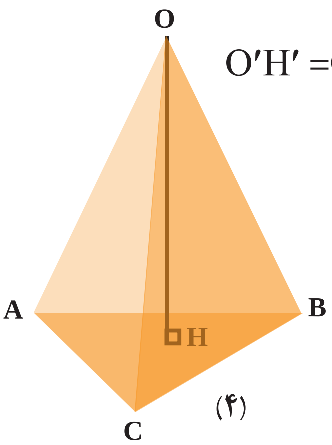
(۲)

در شکل‌های (۳) و (۴) ارتفاع‌ها برابر است.

$O'H' = OH$ و $S_{ABC} < S_{A'B'C'} \Rightarrow V' \bigcirc V$



(۳)



(۴)

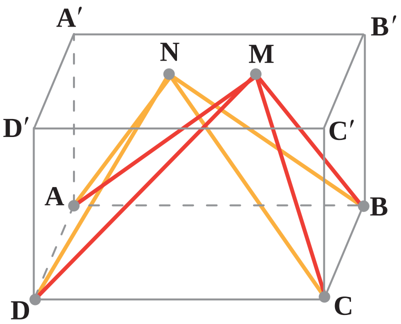
ب)به‌نظر شما حجم هرم به چه مقادیری وابسته است؟

ج) برای محاسبهٔ مساحت مثلث از چه مقادیری استفاده می‌کردید؟ برای محاسبهٔ حجم هرم چه حدسی می‌زنید؟

د) اگر دو هرم دارای قاعده‌های با مساحت مساوی و ارتفاع‌های مساوی باشند، دربارهٔ حجم‌های آنها چه می‌توانید بگویید؟

اگر دو هرم دارای قاعده‌های هم مساحت و ارتفاع‌های مساوی باشند، حجم‌های آنها با هم برابر است.

کار در کلاس

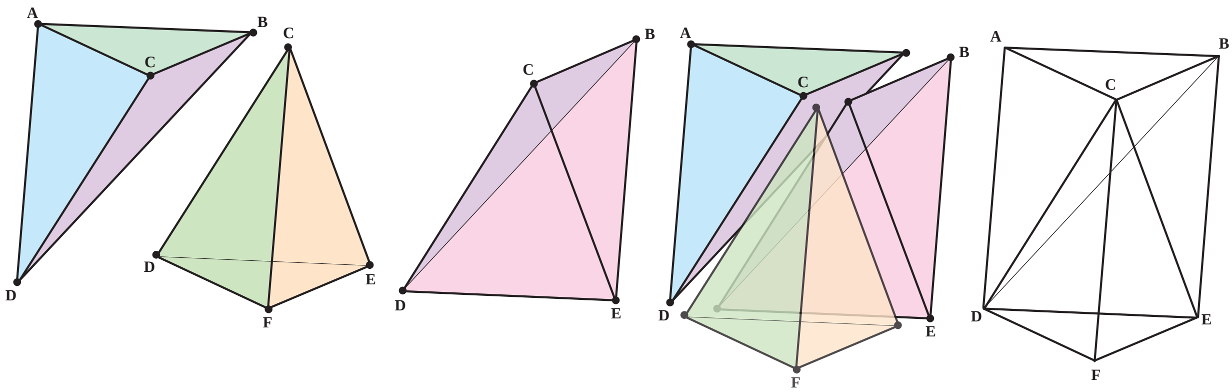


در شکل مقابل، ABCD یک وجه یک مکعب مستطیل و M و N دو نقطهٔ دلخواه روی وجه مقابل (A′B′C′D′) است. چرا هرم‌های MABCD و NABCD دارای حجم‌های یکسان است؟ به این ترتیب چند هرم می‌توان ساخت که با هرم‌های بالا حجم یکسان داشته باشند؟

فعالیت

محاسبهٔ حجم هرم

در شکل زیر، منشوری با دو قاعدهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{DEF}$ را می‌بینید. نقطهٔ C را به نقطه‌های E و D و نقطهٔ B را به نقطهٔ D وصل می‌کنیم؛ به این ترتیب منشور را به سه هرم، مطابق شکل تجزیه می‌کنیم. آیا این سه هرم را در این منشور تشخیص می‌دهید؟ با پاسخ دادن به سؤالات زیر، نشان دهید که این سه هرم، حجم‌های برابر دارد و از آنجا نتیجه بگیرید که حجم هر یک از آنها، یک سوم حجم منشور است.



۱ــ چهارضلعی ABED، چه نوع چهار ضلعی است؟ چرا مثلث‌های ABD و BDE هم مساحت‌اند؟

۲ــ چرا هرم‌های CBED و CBAD دارای حجم‌های برابرند؟

۳ــ چرا مثلث های DEF و ABC هم مساحت‌اند؟

۴ــ چرا هرم‌های CDEF و DABC دارای حجم‌های برابرند؟

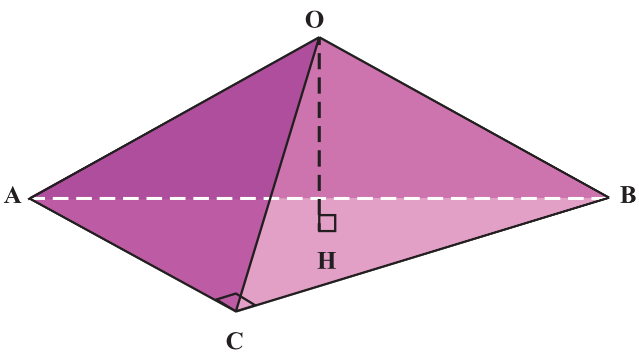
۵ــ با توجه به پاسخ سؤال های ۲ و ۴ چه نتیجه‌ای می گیریم؟

حجم هر هرم با مساحت قاعدهٔ S و ارتفاع h برابر است با :

$$V = \frac{۱}{۳}Sh$$

کار در کلاس

در هرم OABC، $AC = ۶cm$ و $BC = ۱۰cm$ و زاویهٔ $\hat{ACB} = ۹۰^\circ$ و OH ارتفاع هرم مساوی ۵cm است. با کامل کردن عبارت‌های زیر حجم هرم را به‌دست آورید.

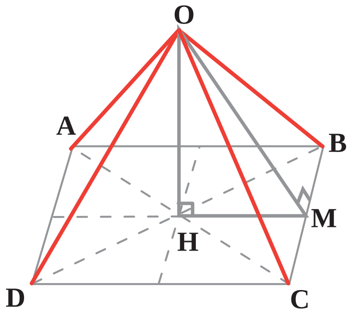


$$S_{ABC}=\frac{AC\times CB}{۲}=\frac{\_\_\times\_\_}{\_\_}=\_\_\ cm^{۲}$$

$$V=\frac{۱}{۳}Sh=\frac{۱}{۳}\times\_\_\times\_\_=\_\_\ cm^{۳}$$

فعالیت

۱ــ در شکل زیر، هرم منتظم با قاعدهٔ مربع، رسم شده که وجه‌های جانبی آن همگی مثلث‌هایی متساوی‌الساقین و طول ساق‌های آنها ۱۰cm و M وسط BC است.



الف) پاره‌خط OM در مثلث OBC چه خواصی دارد؟

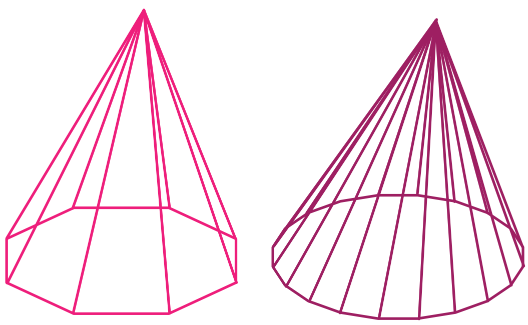
ب) مثلث OBM چه نوع مثلثی است؟

ج) اگر طول ضلع قاعده، ۱۲cm باشد، به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OBM طول OM را حساب کنید.

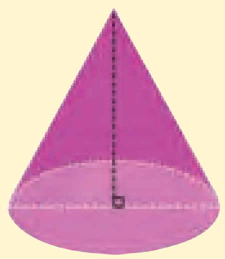
د) مثلث OMH چه نوع مثلثی است؟ طول MH چقدر است؟

هـ) به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OMH، طول OH را به‌دست آورید.

و) حجم هرم OABCD را به‌دست آورید.



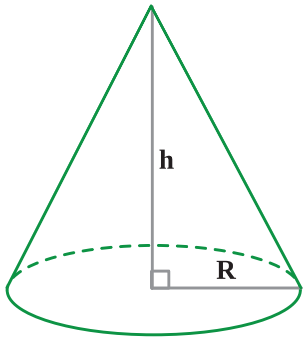
۲ــ هرم منتظمی را درنظر بگیرید که قاعدهٔ آن یک چندضلعی منتظم باشد. مانند مربع، پنج ضلعی منتظم، شش‌ضلعی منتظم و ... . حال تعداد ضلع های این چندضلعی را بیشتر و بیشتر کنید؛ چند ضلعی فوق به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ هرم به چه شکلی نزدیک می‌شود؟



مخروط، شکلی شبیه هرم منتظم است که قاعدهٔ آن به شکل دایره و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.

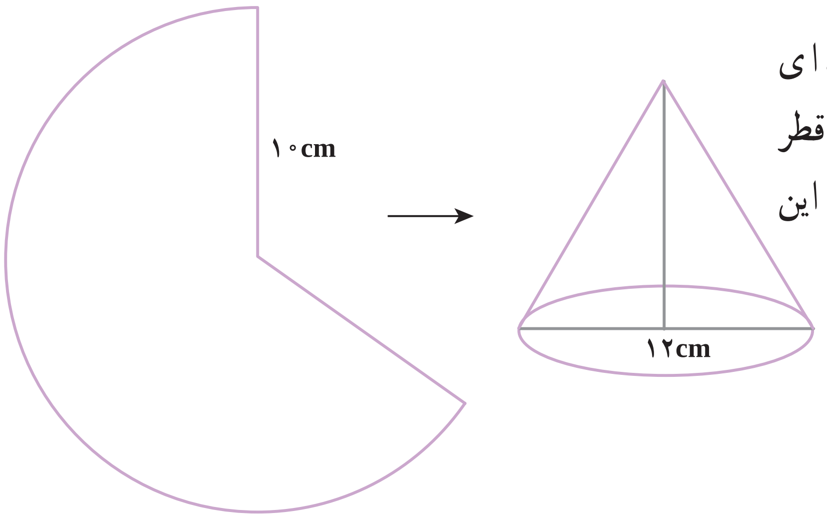
از اینجا نتیجه می‌شود که حجم مخروط، مانند حجم هرم از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$V=\frac{۱}{۳}Sh=\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h$$



کار در کلاس

علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۱۰cm، مخروطی به قطر قاعدهٔ ۱۲cm ساخته است. حجم این مخروط را به‌دست آورید.



تمرین

۱ــ حجم هرمی را به‌دست آورید که قاعدهٔ آن مستطیلی به ابعاد ۶ و ۵ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۱۰سانتی‌متر باشد.

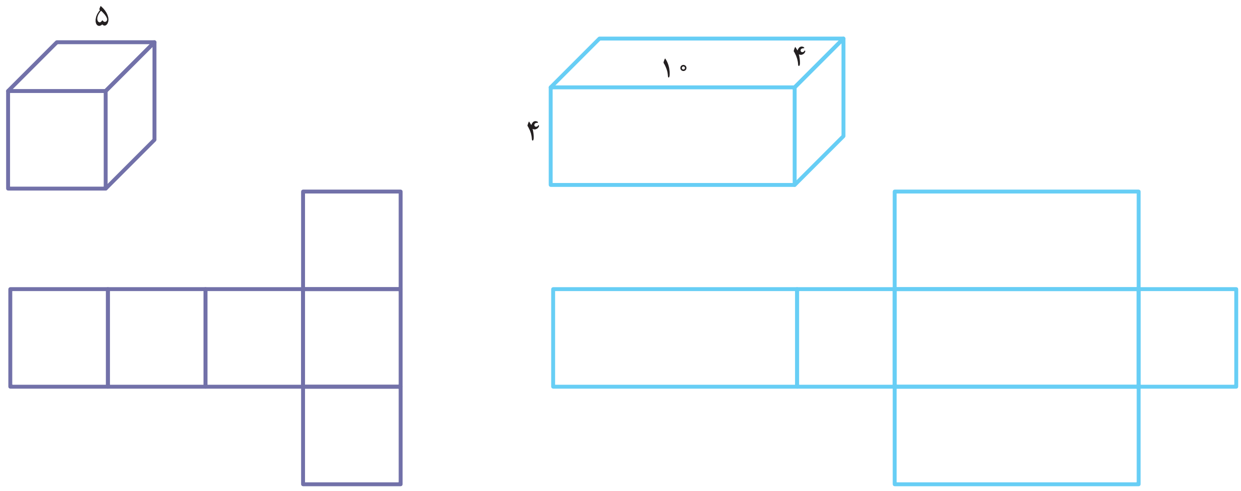
۲ــ حجم هرمی با قاعدهٔ مربع را به‌دست آورید که ضلع قاعدهٔ آن ۴cm باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الساقینی به ساق‌های ۸cm باشد.

۳ــ ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانهٔ ۴cm و به ارتفاع ۱۲cm را از آب پر می‌کنیم و در لیوانی استوانه‌ای شکل، که شعاع قاعدهٔ آن ۶cm است، خالی می‌کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می‌آید؟

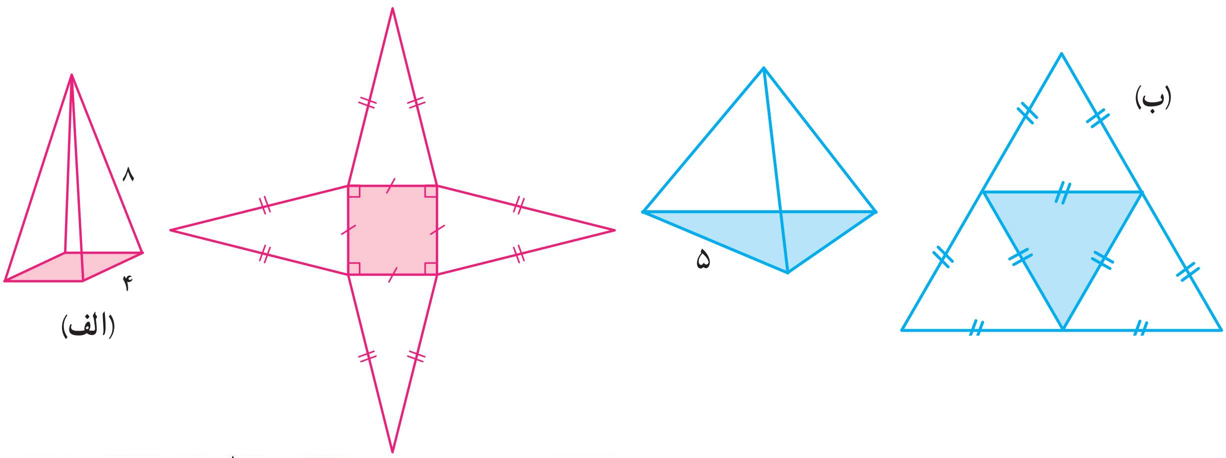
درس سوم: سطح و حجم

فعالیت

۱ــ با توجه به اندازه‌های ابعاد مکعب و مکعب مستطیل، اندازۀ ضلع‌ها را در گستردۀ هر کدام مشخص کنید.

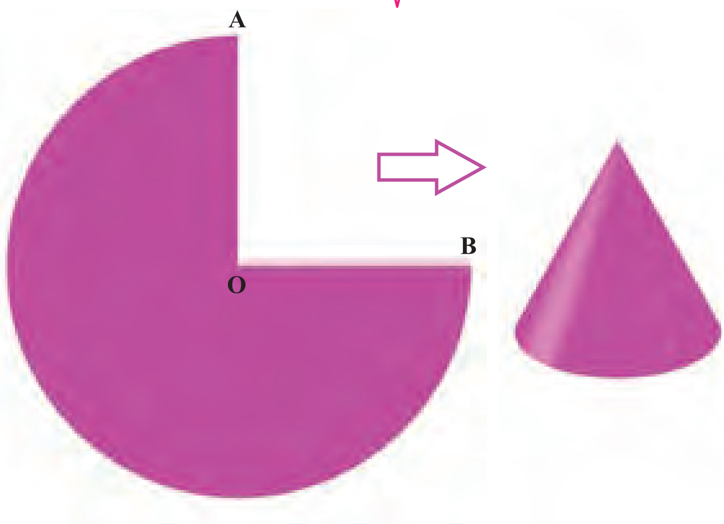


۲ــ مساحت گستردۀ هر یک از هرم‌ها را با توجه به اندازه‌های روی هر هرم محاسبه کنید.

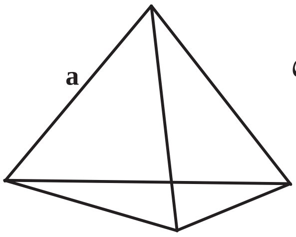


۳ــ با $\frac{۳}{۴}$ دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر یک سطح مخروطی شکل درست کرده‌ایم؛ طول کمان AB چقدر است؟

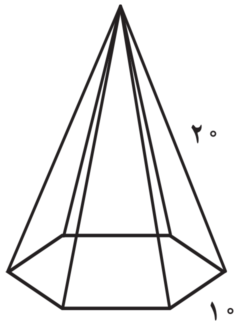
چه رابطه‌ای بین طول کمان AB و محیط دایره قاعدۀ مخروط وجود دارد؟ شعاع قاعده مخروط را پیدا کنید.



کار در کلاس

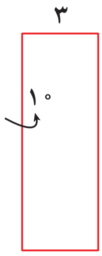


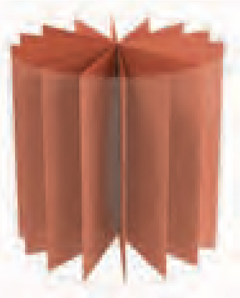
۱ــ مساحت کل هرم منتظم مقابل را به دست آورید. طول همهٔ یال‌های آن a است.



۲ــ باتوجه به اندازه‌های داده‌شده، گستردهٔ هرم را رسم کنید و مساحت جانبی آن‌را به‌دست آورید.

فعالیت



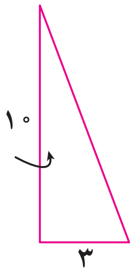


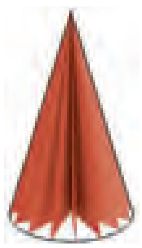
۱ــ با دوران دادن یک مستطیل حول ضلع آن چه حجمی به‌دست می‌آید؟

شعاع قاعدهٔ شکل حاصل : ....

ارتفاع شکل حاصل : ....

حجم شکل حاصل را پیدا کنید.



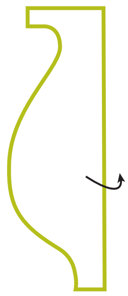


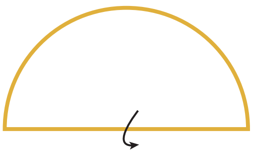
۲ــ اگر مثلث قائم‌الزاویه را حول ضلع مشخص شده در شکل، دوران دهیم، چه شکلی به‌دست می‌آید؟ حجم آن را پیدا کنید.

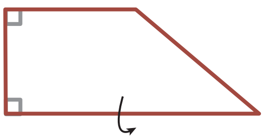
شعاع قاعدهٔ شکل حاصل : ....

ارتفاع شکل حاصل : ....

۳ــ در هر شکل با توجه به محور دوران، که در هر یک مشخص شده است، شکل حجم حاصل را توصیف کنید.

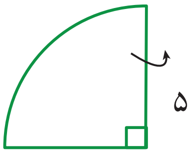






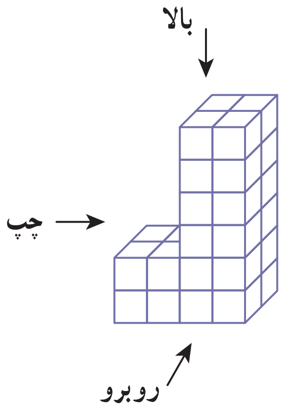
کار در کلاس

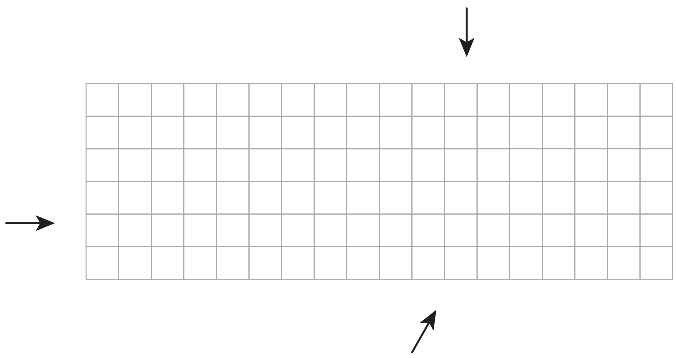
حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع ۵cm را حول شعاع آن پیدا کنید.



فعالیت

۱ــ با توجه به حجم زیر، در صفحهٔ شطرنجی زیر سطح دیده شده از جهت‌های مشخص شده را رسم کنید.





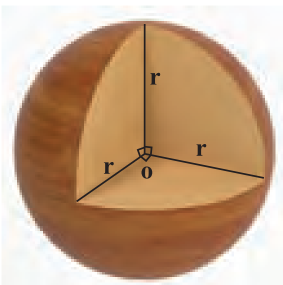
۲ــ اگر هر کدام از هرم‌های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می‌شود؟

الف) هرم منتظم با قاعدهٔ مثلث

ب) هرم منتظم با قاعدهٔ مربع

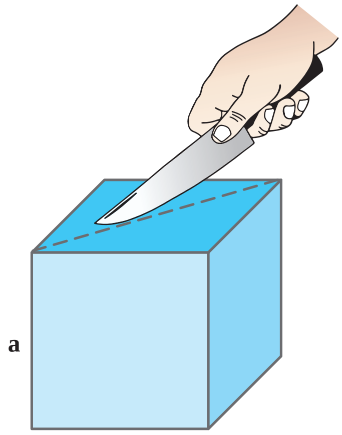
ج) هرم منتظم با قاعدهٔ شش‌ضلعی

۳ــ کره مقابل با یک صفحه بریده شده است. سطح بریده شده چه شکلی دارد؟ در چه صورت این شکل بیشترین مساحت را دارد؟



۴ــ در شکل مقابل، چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟

کار در کلاس

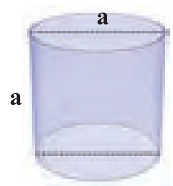


یک اسفنج مکعب شکل به ضلع a را مانند شکل مقابل بریده‌ایم. سطح بریده شده به چه شکلی است؟ اندازهٔ ضلع‌های آن را پیدا کنید.

تمرین

۱ــ حجم و سطح کل شکل‌های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.

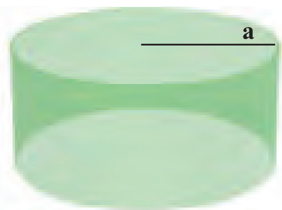
استوانه به ارتفاع و قطر قاعدهٔ a



V=

S=

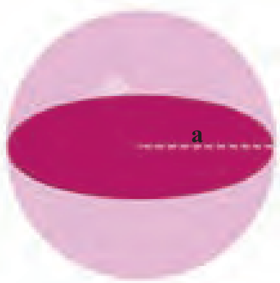
استوانه به ارتفاع و شعاع قاعدهٔ a



V=

S=

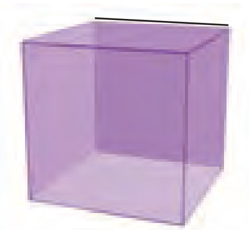
کره به شعاع a



V=

S=

مکعب به ضلع a

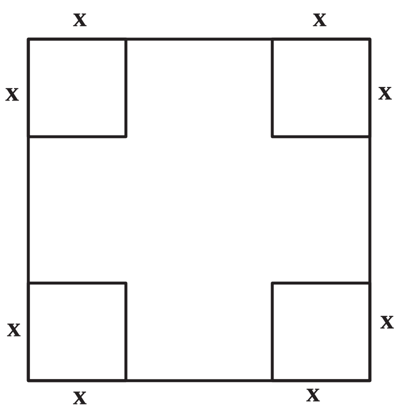


V=

S=

در هر مورد، نسبت حجم به سطح ($\frac{V}{S}$) را به‌دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ‌تر است؟

۲ــ از یک مقوا به ضلع a گوشه‌های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده‌ایم. چه رابطه‌ای باید بین a و x باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد به‌طوری که هر کره به کرهٔ مجاورش و به دیوارهٔ جعبه مماس باشد؟



معلّمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب کتاب‌های درسی از طریق سامانه «نظرسنجی از محتوای کتاب درسی» به نشانی «nazar.roshd.ir» یا نامه به نشانی تهران ـ صندوق پستی ۴۸۷۴ ـ ۱۵۸۷۵ ارسال کنند.

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی